-5782

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

ANNUNZIO.

Per ogni Nota o Memoria, presentata in una sola adunanza del Circolo, la quale sorpassi le 16 pagine di stampa, rimane a carico dell'Autore la *spesa di composizione* delle pagine eccedenti, in ragione di L. 3, 15 per ogni pagina o parte di essa.

Gli Autori che desiderano *Estratti* delle Note e Memorie inserite nei Rendiconti, sono vivamente pregati di avvertirne la Redazione nell'atto di rinviare le prove di stampa. A fine di agevolare i soci nella pubblicazione dei loro lavori, gli estratti saranno ad essi mandati a mano a mano che procede la stampa del fascicolo.

Il prezzo degli estratti è regolato come segue:

Per un foglio di 8 pagine, o meno:

50 esemplari = L. 5; 100 = L. 7, 75; 150 = L. 11; 200 = L. 13, 75; 250 = L. 17; 300 = L. 20, 25; 350 = L. 23, 50; 400 = L. 26, 75.

Per ogni foglio successivo di pagine 8, o parte di esso (oltre la spesa di composizione, come sopra, per le pagine eccedenti i due fogli di stampa):

50 esemplari = L. 3, 75; 100 = L. 5, 25; 150 = L. 7, 25; 200 = L. 8, 75; 250 = L. 10, 75; 300 = L. 12, 75; 350 = L. 14, 75; 400 = L. 16, 75.

Le tavole sono a carico degli Autori.

REDAZIONE: 28, via Ruggiero Settimo — Palermo.

Tipografia Matematica, 28, via Ruggiero Settimo, Palermo.

Proto-Compositore: GAETANO SENATORE.

Macchina tipo Marinoni perfezionato, della casa AUGUSTO DELL'ORTO di Milano.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

TOMO XI. — ANNO 1897.

PARTE PRIMA: MEMORIE E COMUNICAZIONI.

PALERMO,

SEDE DELLA SOCIETÀ

28, via Ruggiero Settimo, 28

1897

MEMORIE E COMUNICAZIONI.

SUR UNE GÉNÉRATION GÉOMÉTRIQUE DE LA SURFACE DE KUMMER;

par M. Georges Humbert, à Paris.

Adunanza del[illegible] novembre 1896.

1. Il semble *a priori* qu'il y ait une infinité simple de surfaces du second ordre indécomposables touchant respectivement en quatre points deux quadriques données: en réalité, il n'en est rien; si les deux quadriques primitives ne satisfont pas à une condition initiale, il n'existe *aucune* surface du second ordre quadritangente à l'une et à l'autre; si la condition est vérifiée, il existe une *infinité double* de telles surfaces. Après avoir établi cette proposition et donné diverses formes à la condition initiale, nous en déduirons une génération géométrique simple de la surface de Kummer.

2. Supposons qu'une même quadrique, Q, touche en 4 points deux quadriques A et B, c.-à-d. coupe A suivant deux droites, a_1 et a_2, *non concourantes,* et de même B suivant deux droites b_1 et b_2: nous pouvons évidemment supposer que les génératrices a_1 et a_2 n'appartiennent pas, *sur* Q, au même système que les génératrices b_1 et b_2. Ces quatre droites forment donc un quadrilatère gauche, dont les quatre sommets sont sur la biquadratique (AB), commune à A et à B.

On voit ainsi qu'*il existe un quadrilatère gauche inscrit à la biquadratique* (AB) *et dont deux côtés opposés sont des génératrices de* A, *et les deux autres des génératrices de* B : or, en général, si A et B sont prises au hasard, il n'y a pas de tel quadrilatère. Imaginons en effet que les coordonnées des points de la biquadratique (AB) soient exprimées en fonction elliptique d'un argument, et de telle sorte que la somme des arguments de quatre points situés dans un plan soit nulle; les génératrices d'un même système d'une quadrique quelconque menée par la courbe (AB) coupent cette courbe en deux points, dont les arguments ont une somme constante, s; pour les génératrices de l'autre système, la somme constante est $-s$. Soient alors λ, μ, ν, ρ les arguments des quatre sommets du quadrilatère gauche considéré ci-dessus, on aura, en désignant par σ et τ les valeurs de la constante s pour les quadriques A et B :

$$(1) \qquad \begin{aligned} \lambda + \mu &= \sigma, & \qquad \lambda + \rho &= \tau, \\ \nu + \rho &= \sigma, & \qquad \mu + \nu &= \tau; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit $2\tau = 2\sigma$, c.-a.-d.

$$(2) \qquad \tau = \sigma + \frac{\Omega}{2},$$

Ω étant une période des fonctions elliptiques introduites. Cette équation (2) établit une relation entre les deux quadriques A et B, qui dès lors ne peuvent être choisies arbitrairement.

3. Supposons maintenant l'équation (2) satisfaite, et montrons que dans ce cas il y a effectivement des surfaces du second ordre quadritangentes à A et B.

On a, en portant la valeur (2) de τ dans les équations (1) :

$$\mu = \sigma - \lambda; \qquad \nu = \lambda + \frac{\Omega}{2}; \qquad \rho = \sigma - \lambda + \frac{\Omega}{2},$$

ce qui détermine les sommets du quadrilatère quand on se donne arbitrairement l'un deux, λ : en d'autres termes, on peut inscrire à la biquadratique (AB) une *infinité simple* de quadrilatères ayant

pour couples de côtés opposés deux génératrices d'un même système des quadriques A et B. Je dis de plus qu'on peut inscrire également à (AB) une infinité simple de quadrilatères analogues, formés avec les génératrices des seconds systèmes de A et de B. Car en appelant λ', μ', ν', ρ' les arguments des sommets, on aura :

$$\lambda' + \mu' = -\sigma, \qquad \lambda' + \rho' = -\tau$$

$$\nu' + \rho' = -\sigma, \qquad \mu' + \nu' = -\tau,$$

équations compatibles, quelque soit λ', puisque $2\tau = 2\sigma$.

Il est clair d'ailleurs que chaque couple de côtés opposés d'un quadrilatère *quelconque* du second groupe s'appuie sur un couple de côtés opposés d'un quadrilatère *quelconque* du premier, de sorte que les 8 côtés des deux quadrilatères sont sur une même surface du second ordre, laquelle, contenant quatre génératrices de A et quatre génératrices de B, est quadritangente à ces deux surfaces.

Donc enfin, si la condition exprimée analytiquement par l'équation (2) n'est pas vérifiée, il n'y a pas de surface du second ordre touchant A et B en quatre points; si elle est vérifiée, il y a une *infinité double* de pareilles surfaces.

4. Il est aisé d'obtenir l'équation générale de celles-ci.

Soient deux quadrilatères gauches, quelconques, 1 et 2, inscrits à la biquadratique (AB) et dont les côtés opposés sont des génératrices d'un *même* système de A, et les autres côtés des génératrices d'un *même* système de B; soient aussi deux autres quadrilatères, 1' et 2', formés avec les génératrices des seconds systèmes de A et B. Les côtés de 1 et 1' sont sur une quadrique C; soient de même D, E, F les quadriques qui contiennent respectivement les côtés de 2 et 2', 1 et 2', 2 et 1'. La surface du *quatrième ordre*, $CD = 0$, passe par les *seize* côtés des quatre quadrilatères; il en est de même de la surface $EF = 0$ et de la surface $AB = 0$. Ces trois surfaces appartiennent donc à un même faisceau ponctuel, en sorte qu'on a identiquement :

$$AB = CD + EF. \tag{3}$$

En d'autre termes, et c'est une autre forme de la condition initiale, *les quadriques A et B sont telles que le produit AB soit décomposable en une somme de quatre carrés.*

De plus, l'identité (3) montre que la surface $AB = 0$ est l'enveloppe des quadriques :

$$\lambda\mu C + \lambda E + \mu F - D = 0, \tag{4}$$

λ et μ désignant des paramètres variables, c.-a.-d. que ces quadriques (4) touchent en quatre points chacune des quadriques A et B. On a ainsi obtenu l'équation cherchée.

Observons enfin que l'identité (3) établit cette proposition :

Deux quadriques C et D touchant chacune en 4 points deux quadriques A et B, il existe deux autres quadriques, E et F, qui touchent en 4 points les quadriques A, B, C et D.

5. Voici une propriété géométrique des quadriques (4) : *il existe deux droites fixes, conjuguées l'une de l'autre par rapport à toutes les surfaces du second ordre qui touchent en 4 points deux quadriques données.*

Car une de ces surfaces (n° 3) coupe la biquadratique (AB) aux points λ, $\lambda + \frac{\Omega}{2}$; $\sigma - \lambda$, $\sigma - \lambda + \frac{\Omega}{2}$ et contient les 4 droites qui joignent les deux premiers points aux deux derniers. Or les points λ et $\lambda + \frac{\Omega}{2}$, sur la biquadratique, sont, comme on sait, conjugués par rapport à deux droites Δ et Δ' (arêtes opposées du tétraèdre autopolaire commun à A et B), c.-a.-d. que la droite qui joint ces deux points rencontre Δ et Δ', et est divisée harmoniquement par les points de rencontre. Il est clair d'ailleurs que le lieu des conjugués, par rapport à Δ et Δ', des points d'une droite est une autre droite; d'où l'on conclut que la droite δ_2, qui joint les points $\lambda + \frac{\Omega}{2}$ et $\sigma - \lambda + \frac{\Omega}{2}$ est le lieu des conjugués des points de la droite δ_1, qui joint λ et $\sigma - \lambda$; de même pour les deux droites $\delta'_1 = \left(\lambda, \sigma - \lambda + \frac{\Omega}{2}\right)$ et $\delta'_2 = \left(\lambda + \frac{\Omega}{2}, \sigma - \lambda\right)$. Cha-

cune des quadriques (4) contient ainsi *deux* couples de droites, δ_1 et δ_2, δ'_1 et δ'_2, conjuguées par rapport à Δ et Δ'; d'où l'on conclut immédiatement la proposition énoncée.

6. On peut donner une autre forme géométrique à la condition initiale (2). Considérons un plan tangent commun à A et B; il coupe la biquadratique (AB) en quatre points, d'arguments α, β, γ et δ, et on a :

$$\alpha + \beta = \sigma, \qquad \alpha + \gamma = \tau = \sigma + \frac{\Omega}{2},$$

$$\gamma + \delta = -\sigma, \qquad \beta + \delta = -\sigma + \frac{\Omega}{2};$$

d'où l'on tire :

$$\gamma = \beta + \frac{\Omega}{2},$$

c.-a.-d. que le plan considéré coupe la biquadratique (AB) en quatre points, dont deux, β et γ, sont conjugués par rapport aux droites Δ et Δ'.

Inversement, si cette condition est remplie par *un seul* plan tangent commun aux surfaces A et B, elle est vérifiée pour tous les autres, et la relation fondamentale (2) est satisfaite. Car les équations :

$$\begin{matrix} \alpha + \beta = \sigma, & \alpha + \gamma = \tau \\ \gamma + \delta = -\sigma, & \beta + \delta = -\tau \end{matrix} \quad \text{avec} \quad \gamma = \beta + \frac{\Omega}{2}$$

donnent bien $\tau = \sigma + \dfrac{\Omega}{2}$. Ainsi :

Un plan tangent commun aux quadriques A et B coupe les droites Δ et Δ' en deux points : la droite qui joint ces points est une corde de la biquadratique (AB) commune aux deux quadriques.

7. De là se déduit très simplement la relation analytique qui lie les invariants simultanés des quadriques A et B.

Supposons en effet ces quadriques ramenées à la forme :

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0;$$

un plan

$$(5) \qquad ux + vy + wz + pt = 0$$

les touchera si :

$$(6) \qquad \begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 + p^2 = 0, \\ \frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} + \frac{p^2}{d} = 0. \end{aligned}$$

Le tétraèdre autopolaire commun à A et B a pour faces les plans de coordonnées; supposons que les droites Δ et Δ', arêtes opposées de ce tétraèdre, soient les droites $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, $t = 0$: la droite qui joint les points où elles sont rencontrées par le plan (5) est :

$$ux + vy = 0, \qquad wz + pt = 0;$$

pour qu'elle soit une corde de la biquadratique (AB) il suffit évidemment qu'elle rencontre cette courbe en un point; d'où la condition :

$$(7) \qquad (u^2 + v^2)(cp^2 + dw^2) = (p^2 + w^2)(av^2 + bu^2),$$

qui doit être une conséquence des relations (6). Tirons de celles-ci les valeurs de $u^2 + v^2$ et $bu^2 + av^2$, et portons-les dans (7); il vient :

$$w^4 \left[d - \frac{ab}{c}\right] + p^2 w^2 \left[c + d - \frac{ab}{c} - \frac{ab}{d}\right] + p^4 \left[c - \frac{ab}{d}\right] = 0,$$

ce qui n'est vérifié identiquement que si $cd = ab$.

Telle est la relation qui lie les coefficients des quadriques; pour l'exprimer en fonction des invariants simultanés, écrivons ces invariants :

$$\Delta' = 1; \quad \Delta = abcd; \quad \Theta = cd(a+b) + ab(c+d);$$

$$\Theta' = a + b + c + d.$$

On en déduit :

$$\Delta = abcd = a^2 b^2; \quad \text{d'où} \quad ab = cd = \sqrt{\Delta}$$

et

$$\Theta = ab(a+b+c+d) = \sqrt{\Delta}\,\Theta';$$

rendant enfin cette équation homogène à l'aide de la relation $\Delta' = 1$, on a :

$$\Delta \Theta'^2 = \Delta' \Theta^2,$$

condition qui exprime, sous forme analytique, que les deux quadriques A et B admettent des surfaces du second ordre quadritangentes.

8. On trouve aisément l'équation des surfaces du second ordre qui touchent en quatre points les deux quadriques

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0;$$

d'après le n° 4, il suffit de décomposer le produit AB en une somme de quatre carrés : or on a identiquement, si $ab = cd$:

$$\begin{aligned}
&4d(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)(ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2)\\
&= [(a+d)x^2 + (b+d)y^2 + (a+b)z^2 + 2dt^2]^2\\
&\quad + 4(a-d)(b-d)z^2t^2 + 4(b-d)(a-b)y^2z^2\\
&\quad - [(a-d)x^2 + (b-d)y^2 + (a-b)z^2]^2,
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit immédiatement l'équation cherchée (n° 4).

9. Indiquons une dernière interprétation de la condition fondamentale, en géométrie Plückerienne.

Les génératrices d'un même système de la quadrique A appartiennent à trois complexes linéaires, linéairement distincts :

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad A_3 = 0;$$

et de même les génératrices d'un même système de B aux trois complexes

$$B_1 = 0, \qquad B_2 = 0, \qquad B_3 = 0.$$

Si une quadrique, Q, contient deux des génératrices précédentes de A, ses génératrices d'un même système appartiennent nécessairement à deux complexes linéaires de la forme :

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0, \tag{8}$$

$$\lambda'_1 A_1 + \lambda'_2 A_2 + \lambda'_3 A_3 = 0, \tag{9}$$

et réciproquement; si elle est quadritangente à B, les mêmes génératrices de Q appartiennent aux deux complexes linéaires :

$$\mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \mu_3 B_3 = 0 \tag{10}$$

$$\mu'_1 B_1 + \mu'_2 B_2 + \mu'_3 B_3 = 0. \tag{11}$$

Les quatre complexes (8), (9), (10), (11) ayant en commun les droites d'un même système de Q, il existe entre les premiers membres de leurs équations une relation linéaire et homogène, c.-à-d. une identité de la forme :

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3;$$

ce qui exprime que *les génératrices de A et celles de B* (des systèmes considérés) *appartiennent à un même complexe linéaire, C:*

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0 \quad (\text{ou } \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3 = 0),$$

Supposons cette condition remplie: les génératrices de A seront définies par les trois complexes:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad C = 0$$

et celles de B, par:

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad C = 0.$$

Les quadriques Q dont un système de génératrices est défini par les équations:

$$A_1 + \lambda A_2 = 0, \quad B_1 - \mu B_2 = 0, \quad C = 0$$

coupent évidemment A et B suivant deux droites non concourantes, c.-à-d. suivant quatre droites: il y a ainsi une série doublement infinie de quadriques Q; on voit que, sur chacune d'elles, les génératrices d'un système appartiennent à un complexe linéaire fixe, C, et, d'après le même raisonnement, celles du second système appartiennent à un autre complexe linéaire fixe, C'. Il est aisé d'établir que la congruence commune à C et C' a pour directrices les droites Δ et Δ'.

10. Génération de la surface de Kummer. — La proposition suivante rattache cette théorie à celle de la surface de Kummer.

Les surfaces du second ordre quadritangentes à deux quadriques données et passant par un point donné ont pour enveloppe une surface de Kummer.

En effet, l'équation générale des quadriques tangentes en 4 points à A et à B étant:

$$\lambda\mu C + \lambda E + \mu F - D = 0,$$

on a entre λ et μ, pour celles qui passent par un point donné, la relation:

$$\lambda\mu C_0 + \lambda E_0 + \mu F_0 - D_0 = 0,$$

$C_0, \ldots$ désignant les valeurs de $C, \ldots$ au point donné, o. L'équation de ces quadriques est donc :

(12) $\mu^2[FC_0 - F_0C] + \mu[CD_0 - C_0D + FE_0 - F_0E] + ED_0 - E_0D = 0,$

et leur enveloppe est la surface du quatrième ordre :

(13) $(CD_0 - C_0D + FE_0 - F_0E)^2 - 4(FC_0 - F_0C)(ED_0 - E_0D) = 0,$

qui admet évidemment pour points doubles les *huit* points définis par les trois équations :

(14) $$\frac{C}{C_0} = \frac{D}{D_0} = \frac{E}{E_0} = \frac{F}{F_0},$$

parmi lesquels figure le point o, primitivement donné, et qui sont communs à toutes les quadriques enveloppées (12).

D'ailleurs, en tenant compte de l'identité $AB = CD + EF$, on peut mettre l'équation (13) de l'enveloppe sous la forme :

$$(CD_0 + C_0D + EF_0 + E_0F)^2 - 4A_0B_0AB = 0,$$

ce qui montre que l'enveloppe a aussi pour points doubles les *huit* points communs aux trois quadriques $A = 0$, $B = 0$, $CD_0 + C_0D + E_0F + EF_0 = 0$, points qui sont distincts des huit premiers : en effet si l'un de ceux-ci était sur A ou sur B, il vérifierait (en vertu de l'identité) l'équation $CD + EF = 0$, et on aurait alors, d'après (14), $C_0D_0 + E_0F_0 = 0$, c.-a.-d. que le point primitif, o, serait sur une des surfaces A ou B, ce qui n'est pas le cas général.

Donc enfin l'enveloppe considérée est une surface du quatrième ordre à seize points doubles, c.-a.-d. une surface de Kummer.

11. *Réciproquement,* toute surface de Kummer, K, peut être engendrée de cette manière : on sait en effet que K admet 30 systèmes de quadriques inscrites, deux à deux conjugués, c.-a.-d. tels que les surfaces d'un système passent par huit points doubles et les surfaces du système conjugué par les huit autres. De plus, deux surfaces appartenant respectivement à deux systèmes conjugués se touchent en quatre points, de sorte que K est bien l'enveloppe de quadriques tangentes en quatre points à deux quadriques fixes et passant par un point fixe.

Il résulte aussi de là que les quadriques A et B appartiennent à un même système de quadriques inscrites à K, et que les surfaces (12) forment le système conjugué.

En transformant par polaires réciproques le théorème du n° 10, on voit également que :

Les surfaces du second ordre quadritangentes à deux quadriques données et touchant un plan donné ont pour enveloppe une surface de Kummer.

12. Si l'on se reporte aux propriétés connues de la surface de Kummer, on arrive sans difficulté aux résultats suivants, qui complètent ce qui précède.

La surface de Kummer, K, enveloppe des quadriques qui passent par un point fixe, o, et touchent en quatre points deux quadriques données, A et B, a pour plans singuliers (c.-a.-d. plans tangents le long d'une conique) :

1° Les *quatre* plans, P_1, P_2, P_3, P_4 menés par o tangentiellement aux deux quadriques A et B;

2° Les *quatre* plans P_1, P_2, P_3, P_4, conjugués des précédents par rapport aux droites Δ et Δ'.

Quant aux *huit* autres plans singuliers de K, ils s'obtiennent comme il suit.

Chacun des quatre plans P_1, ... P_4 coupe le plan conjugué suivant une droite, qui rencontre en deux points la biquadratique (AB) (n° 6); ces deux points sont des points doubles de K: on obtient ainsi huit points doubles de K, associés deux à deux, ω_1, ω_1'; ω_2, ω_2'; ...; ω_4, ω_4', et qui sont situés, quatre par quatre, dans huit nouveaux plans; ces huit plans sont les huit derniers plans singuliers de K.

On a ainsi déterminé géométriquement les 16 plans singuliers, et par suite les 16 points doubles, de la surface de Kummer.

Paris, 28 septembre 1896.

GEORGES HUMBERT.

SULLA CURVA LUOGO DEI CONTATTI D'ORDINE k DELLE CURVE D'UN FASCIO COLLE CURVE D'UN SISTEMA LINEARE ∞^k.

Memoria II^a di **Michele de Franchis**, in Palermo (*).

Adunanze del 14 e 28 giugno 1896.

§ 4.

Sui punti multipli di una serie lineare di gruppi di punti sopra una curva algebrica.

27. In questa seconda Memoria mi propongo di mostrare alcune applicazioni della teoria delle curve $\Omega^k_{C\Gamma}$ relative ad un fascio di curve (C) e ad un sistema lineare ∞^k di curve $[\Gamma]^k$ (Mem. I, § 3). Cominceremo dalla ricerca dei punti $(k+1)$-pli di una serie lineare di gruppi di punti g^k_ν sopra una curva algebrica del genere p, ricerca che sinteticamente hanno già eseguito illustri geometri (**),

(*) Vedi la Memoria precedente sullo stesso argomento, in questi Rendiconti, t. X, pp. 118-152, che mi permetterò di denotare con Memoria I.

(**) Vedi in proposito: Brill: *Ueber zwei Berührungsprobleme* (Math. Ann., t. IV, 1871); Castelnuovo: *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, t. XXIV, 1889), n° 7; e Segre: *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Annali di Matematica, t. XXII$_2$, 1894), § 11.

servendosi dei caratteri delle curve iperspaziali. Il nostro procedimento invece permette di non uscire dal piano, qualora si tratti di curve piane, e, per conseguenza, di non uscire dallo spazio ordinario o dall'iperspazio ad r dimensioni, qualora vogliansi considerare curve gobbe od immerse in un iperspazio ad r dimensioni; e ciò perchè la ricerca dei punti multipli di serie lineari su tali curve si riconduce a quella dei punti multipli delle serie corrispondenti nelle loro projezioni piane.

28. Siano in un piano: C una curva irreduttibile d'ordine n, e $[\Gamma]^k$ un sistema lineare ∞^k di curve d'ordine m, ogni curva del quale sechi la curva C secondo un numero *finito* di punti (*). Allora l'insieme dei gruppi di punti secati su C dalle curve di $[\Gamma]^k$ dicesi *serie lineare di dimensione* (o *specie*) k *e d'ordine* (o *grado*) mn; coll'avvertenza che, se tutti i gruppi della serie hanno j punti (distinti o coincidenti) in comune ($j \leq mn - k$), si possa anche dire che la serie data è dell'ordine $\nu = mn - i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, j$), con $j - i$ *punti base* (o *punti fissi*), distinti o coincidenti. Una serie lineare di dimensione k e d'ordine ν s'indicherà col simbolo g_ν^k (**). In particolare, g_ν^0 sarà un gruppo di ν punti. Se $G_1, G_2, \ldots, G_{k+1}$ sono $k + 1$ gruppi *linearmente indipendenti* (tali cioè da non appartenere ad una g_ν^{k-i}, per $i > 0$) della serie g_ν^k, questa verrà indicata anche col simbolo $[G_1, G_2, \ldots, G_{k+1}]$.

Se, con una trasformazione Cremoniana, riferiamo i punti del piano dato a punti d'un altro piano, alla curva C corrisponderà una curva C' ed alla serie lineare g_ν^k corrisponderà su C' una serie lineare $g_\nu'^k$. Ad ogni serie lineare g_ν^{k-i}, contenuta nella g_ν^k, corrisponderà su C' una serie lineare $g_\nu'^{k-i}$, contenuta in $g_\nu'^k$, e viceversa (***).

Se P è un punto (r)-plo ($r \geq 1$) della curva C, ed indichiamo con R un ramo di C avente l'origine in P e non avente ivi nessun

(*) Diremo più brevemente, in tal caso, che il sistema $[\Gamma]^k$ *non contiene* C, nel senso che C non fa parte di nessuna curva del sistema.

(**) Vedi Brill e Noether: *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* (Math. Ann., t. VII, pp. 269-310), pag. 276.

(***) Tali proprietà sussisterebbero anche per semplici trasformazioni birazionali della curva C; vedi Segre, loc. cit.

contatto con altri rami uscenti da P, avrà senso ben determinato il dire che, per $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ una certa serie g_ν^{k-1} contenuta nella g_ν^k ha un punto base (σ_i)-plo in P sul ramo R: ciò equivarrà al dire che σ_i dei ν punti d'un gruppo generico della g_ν^{k-1} sono coincidenti in P sul ramo R. In generale sarà $\sigma_i = i$, ed allora diremo che nel punto P e sul ramo R la serie g_ν^k ha un punto ordinario, altrimenti diremo che nel punto P e sul ramo R la serie g_ν^k ha una singolarità $[\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k]$ $(0 \leqq \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_k \leqq \nu - k)$ (*).

Se con una trasformazione Cremoniana sul piano della curva C si passa da questa ad una curva C', ed al punto P della curva C, considerato come appartenente al ramo R, corrisponde il punto P' di C' considerato come appartenente ad un ramo R' non avente in P' contatti con altri rami di C', la serie lineare corrispondente su C' alla g_ν^k, ha pure in P' e sul ramo R' la singolarità $[\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k]$, qualora noi però consideriamo in ogni gruppo della serie trasformata il punto P' sul ramo R' contato σ_0 volte (**).

29. Sia C una curva piana e P un punto (r)-plo qualunque di essa. Assoggettiamo il piano π nel quale trovasi C ad una trasformazione Cremoniana la quale verifichi alle seguenti condizioni che possono, com'è noto (***), venir sempre soddisfatte:

1) che al punto P della curva C corrispondano sulla curva trasformata C_1 punti semplici,

(*) Secondo una notazione del Guccia nella Nota: *Sulle involuzioni di specie qualunque dotate di singolarità ordinarie* (questi Rendiconti, t. VIII, 1894), p. 227; in tale Nota si suppone però $\sigma_0 = 0$: l'essere $\sigma_0 > 0$ equivale a dire che la g_ν^k ha un punto base (σ_0)-plo, e quindi si riduce ad una $g_{\nu-\sigma_0}^k$, dotata in P e sul ramo R della singolarità $[0, \sigma_1 - \sigma_0, \sigma_2 - \sigma_0, \ldots, \sigma_k - \sigma_0]$, ed al punto P, considerato sul ramo R, contato σ_0 volte.

(**) Tali proprietà sussistono, com'è noto, anche per semplici trasformazioni birazionali della curva C.

(***) Noether: *Ueber die algebraischen Functionen einer und zweier Variabeln;* note 2 (Götting. Nachrichten, 1871); *Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve* (Math. Ann., t. IX); e *Rationale Ausführung der Operationen* etc., etc., (Math. Ann., t. XXIII); e Bertini: *Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche* (Rend. del R. Ist. Lomb., t. XXI, 1888$_1$).

2) che il punto P sia fondamentale per la trasformazione adoperata (*).

3) che i punti semplici di C_1 corrispondenti al punto P di C non siano punti fondamentali del piano trasformato, per la trasformazione.

Indicheremo con n l'ordine della curva C, con T_1 la trasformazione Cremoniana impiegata, con Φ_1 la curva fondamentale (semplice o composta) corrispondente nel piano trasformato π_1 al punto P di π, con $P'_1, P''_1, \ldots, P_1^{(s)}$ $(s \geq 1)$ i punti di C_1 corrispondenti al punto P di C, e con (P_1) il gruppo costituito da tali punti.

Supposto che nel punto $P_1^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ di tal gruppo le curve C_1, Φ_1 abbiano riunite λ_i intersezioni, diremo (per semplicità di linguaggio) che il punto $P_1^{(i)}$ *è* (λ_i)*-valente nel gruppo* (P_1).

30. Consideriamo un punto generico Q del piano π e consideriamo il fascio di rette di centro Q. Ad esso corrisponderà nel piano π_1 un fascio di curve (φ_1), il quale seca la C_1 secondo una serie lineare g_n^1 (n° 28). In particolare, alla retta QP corrisponde una curva del fascio (φ_1) della quale fa parte la curva fondamentale Φ_1; ed il gruppo della serie g_n^1 secato da tal curva composta su C_1 ha in ogni punto (λ_i)-valente del gruppo (P_1) un punto (λ_i)-plo, e contiene inoltre solo un gruppo (a) di altri $n - r$ punti, corrispondenti agli $n - r$ punti in cui la retta PQ incontra, oltre a P, la curva C. Si ha, come prima conseguenza, $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = r$. Se consideriamo nel piano π una retta uscente da Q che s'avvicini indefinitamente alla QP, essa secherà la curva C in n punti, r dei quali tendono a P sugli r rami uscenti da P. Il gruppo di punti che corrispondono su C_1 a tali n punti è evidentemente costituito da $n - r$ punti tendenti ai punti del gruppo (a) e da altri r punti che tendono ai punti del gruppo (P_1), e precisamente (per la continuità) avremo che ad un punto $P_1^{(i)}$ (λ_i)-valente di esso (n° 29) s'avvicineranno λ_i di tali punti. Conseguentemente, ai punti di C_1 vicinissimi a $P_1^{(i)}$ corrisponderanno punti vicinissimi a P su λ_i rami. Viceversa, se sol-

(*) Ciò non sarebbe necessario se fosse $r = 1$.

tanto ai punti vicini a P appartenenti a λ_i rami della curva data C corrispondono punti vicini a $P_1^{(i)}$ (*), il punto $P_1^{(i)}$ è un punto (λ_i)-valente del gruppo P_1.

Operiamo un'altra trasformazione Cremoniana T_2 del piano π in un piano π_2. Sia C_2 la curva di π_2 corrispondente a C. Supporremo che la T_2 soddisfi anch'essa alle condizioni 1), 2) e 3) del n° 29. Indichiamo con (P_2) il gruppo dei punti di C_2 corrispondenti al punto P di C. In virtù delle trasformazioni T_1 e T_2 abbiamo una corrispondenza univoca fra i piani π_1 e π_2, tale che alla curva C_1 di π_1 corrisponde in π_2 la curva C_2. È chiaro, in virtù delle osservazioni precedenti, che ad ogni punto del gruppo (P_1) di C_1 corrisponde *un* punto del gruppo (P_2) di C_2 in guisa che ad un punto (λ_i)-valente di (P_1) corrisponde un punto (λ_i)-valente di (P_2). Quest'osservazione giustifica pienamente le seguente definizione:

Dicesi ciclo d'ordine λ, *avente l'origine in* P, *il complesso dei rami di* C, *uscenti da* P, *ai quali corrisponda un ramo di* C_1 *uscente da un punto* (λ)-*valente del gruppo* (P_1) (n° 29) (**).

31. Se, tenendo le notazioni dei n[i] 29 e 30, supponiamo data sulla curva C una serie lineare g_ν^k, e denotiamo con P_1', P_2' i punti origini dei rami semplici corrispondenti nelle curve C_1 e C_2 ad uno stesso ciclo di C avente l'origine in P, alla serie lineare g_ν^k su C corrispondono su C_1 e C_2 due serie lineari $g_\nu'^k$, $g_\nu''^k$ (n° 28). E se la serie $g_\nu'^k$ ha in P_1' la singolarità $[\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k]$ (n° 28) anche la $g_\nu''^k$ avrà in P_2' la stessa singolarità, e viceversa; e ciò perchè (n° 28), indicando con T_1 e T_2 le trasformazioni che ci conducono da C a

---

(*) Nel senso che tra gli r punti di una retta mobile, che tenda verso una retta generica uscente da P, trovantisi sulla curva data e tendenti verso P, ve ne siano sempre λ_i cui corrispondano su C_1 punti tendenti verso $P_1^{(i)}$.

(**) In un'altra memoria di prossima pubblicazione farò vedere come la precedente definizione sintetica di ciclo possa servire di base ad una trattazione sintetica delle singolarità delle curve algebriche. Essa si fonda, come s'è visto, essenzialmente sul teorema di Noether sulla risoluzione delle singolarità. Una definizione analoga fu già data dal sig. Del Pezzo, servendosi di curve iperspaziali di cui la data sia projezione, nella Nota: *Intorno ai punti singolari delle curve algebriche* (Rend. della R. Acc. di Napoli, 1893).

C_1 e C_2, si passa da C_1 a C_2 mediante la trasformazione $T_1^{-1} T_2$. Donde noi diremo, in tal caso, che *la serie lineare* g_ν^k *su* C *ha sul* *iclo dato la singolarità* $[\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k]$. Si ricava dalla predetta lefinizione che:

se sopra una curva C *si ha una serie lineare* g_ν^k *dotata in un* *iclo di* C *della singolarità* $[\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k]$, *allora passando per* *nezzo di una trasformazione Cremoniana del piano di* C, *ad una* *urva* C_1, *la serie lineare* $g_\nu'^k$ *corrispondente alla data, ha, sul ciclo* *orrispondente al dato, la singolarità* $[\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k]$ (*).

Adesso, quando noi parleremo di *punto* della curva in relazione d una serie lineare sulla curva, intenderemo considerare quel punto ome origine d'un ben determinato ciclo, sicchè per noi un punto rigine di più cicli sarà non *un* punto, ma un insieme di punti *diersi,* ed invece di dire che una serie ha in un ciclo la singolarità $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k]$ diremo che ha tale singolarità nel punto origine el ciclo.

32. Data una curva C e su di essa una serie lineare g_ν^k, ogni unto di C origine di un ciclo sul quale la g_ν^k abbia la singolarità $0, 1, \ldots, k-1, k+1]$, dicesi *punto* $(k+1)$*-plo* della serie.

Da quanto precedentemente s'è detto risulta che, operando una asformazione Cremoniana del piano della curva C, alla serie lieare g_ν^k su C corrisponde, sulla curva trasformata, una serie $g_\nu'^k$ i ui punti $(k+1)$-pli sono i corrispondenti dei punti $(k+1)$-pli ella g_ν^k. Sicchè:

per ricercare i punti $(k+1)$*-pli di una serie lineare* g_ν^k *sopra una* *urva qualunque* C, *possiamo con una trasformazione Cremoniana del* *iano di* C *ridurci ad una curva* C' *dotata di soli punti multipli or-* *inari e tali che in essi e sui diversi rami uscenti da essi la serie* *asformata abbia punti ordinari* (n° 28), *e cercare in tal curva i* *unti* $(k+1)$*-pli della serie lineare trasformata.*

33. Sia quindi C una curva piana d'ordine n e genere p do-

(*) Questa proprietà, com'è noto, sussiste più generalmente per il gruppo elle trasformazioni birazionali della curva C.

tata di sole singolarità ordinarie, e sia $[\Gamma]^k$ un sistema lineare ∞^k di curve d'ordine m non contenente C (n° 28, nota I[a]). Sia g^k_{mn} la serie lineare secata su C da $[\Gamma]^k$, e supponiamo che g^k_{mn} non abbia singolarità nei rami uscenti dai punti multipli di C. Supponiamo inoltre, per maggior generalità, che la serie g^k_{mn} risulti di $mn - \nu$ punti base distinti o coincidenti e di una serie residuale g^k_ν.

Associando alla curva C una curva C' dello stesso ordine, non avente punti multipli cha siano anche punti di C, e che sechi la C in punti semplici di C, che non siano singolari per la serie g^k_{mn}, si ha un fascio di curve (C) d'ordine n individuato dalle curve C e C', e quindi una curva $\Omega^k_{C\Gamma}$ luogo dei punti di contatto d'ordine k delle curve del fascio (C) con quelle del sistema $[\Gamma]^k$ (Memoria I, § 3) (*).

I punti d'intersezione della curva $\Omega^k_{C\Gamma}$ con C fuori degli n^2 punti base del fascio (C) e fuori dei punti multipli di C, sono i punti $(k+1)$-pli della serie g^k_{mn} secata su C dal sistema $[\Gamma]^k$.

Se poi dalla serie g^k_{mn} si vogliono togliere $mn - \nu$ punti base, e considerare i punti $(k+1)$-pli della serie g^k_ν residuale, bisogna escludere ancora le intersezioni delle curve $\Omega^k_{C\Gamma}$, C riunite in tali $mn - \nu$ punti.

34. Da quanto s'è detto nei n[i] 32 e 33 e dal Teorema XVI della Mem. I, si ha la seguente proposizione:

Data su una curva C una serie lineare di gruppi di punti g^k_ν $(k > 2)$,

(*) Nella Mem. I abbiamo sempre supposto che il fascio $(C) \equiv (C, C')$ non abbia alcuna curva in comune col sistema $[\Gamma]^k$ (n° 22, nota). Qui tale esclusione non è necessaria, perchè, se esistesse una curva C_1 del fascio (C) decomposta in due curve C'_1 (la quale potrebbe anche non esistere), K, e quest'ultima facesse anche parte di curve del sistema $[\Gamma]^k$, allora della curva $\Omega^k_{C\Gamma}$, data dalla costruzione accennata, nel Teor. XVI della Mem. I, farebbe parte la curva K (Mem. I, § 1, n° 8; e questa, più oltre al n° 40), ma ciò non altererebbe in nulla i nostri presenti ragionamenti, perchè le curve C, C_1 sono diverse. Del resto si potrebbe evitare tal fatto costruendo il fascio (C) in altro modo (p. es., considerando la curva composta C^* risultante delle due curve semplici C ed L, e scegliendo L opportunamente, in modo che esista un fascio (C) contenente la curva composta C^* e non avente curve in comune con $[\Gamma]^k$).

indicando con $G_1, G_2, \ldots, G_k, G_{k+1}$ $k+1$ *gruppi linearmente indipendenti della serie* g_ν^k,

con $H_k(G_1, G_2, \ldots, G_k, G_{k+1})$ *il gruppo dei punti* $(k+1)$*-pli della serie* $g_\nu^k \equiv [G_1, G_2, \ldots, G_k, G_{k+1}]$ (n° 28),

con G_k^* *un gruppo arbitrario della serie lineare* ∞^1 $[G_k, G_{k+1}]$;

quando il gruppo G_k^* *descrive la serie* ∞^1 $[G_k, G_{k+1}]$, *il gruppo* $H_{k-1}(G_1, G_2, \ldots, G_{k-1}, G_k^*)$ *dei punti* (k)*-pli della serie lineare* $\infty^{k-1}[G_1, G_2, \ldots, G_{k-1}, G_k^*]$ *descrive una serie lineare* ∞^1 *che indicheremo con* γ^1,

il gruppo dei punti doppi della serie γ^1 *si scinde in due gruppi: l'uno è il gruppo* $H_{k-2}(G_1, G_2, \ldots, G_{k-2}, G_{k-1})$, *l'altro è il gruppo* $H_k(G_1, G_2, \ldots, G_k, G_{k+1})$.

Ciò vale ancora per $k=2$, *purchè conveniamo di porre* $H_0(G_1) \equiv G_1$ (*).

35. L'ultima proposizione accennata ci permette di ricondurre le questioni relative ai punti $(k+1)$-pli di una g_ν^k a questioni analoghe relative ai punti doppi di una g_ν^1. Noi perciò cominceremo dal ricercare i punti doppi di una g_ν^1 sopra una curva C del genere p.

Per tale ricerca è utile la considerazione d'un caso particolare. Se C è una curva d'ordine μ ed ha un punto $(\mu-1)$-plo ordinario B (**), proiettando i punti della curva C dal punto B sopra una retta R non passante per B, si ottiene una rappresentazione univoca di C sulla retta R. E col mezzo di tale rappresentazione è facile vedere che, data su C una g_ν^1, essa ha $2(\nu-1)$ punti doppi, e che, se la g_ν^1 ha in un punto la singolarità $[\sigma_0, \sigma_1]$ (n[i] 28 e 31),

---

(*) Questo teorema si può anche ricavare partendo dalla rappresentazione iperspaziale della serie g_ν^k: ripetendolo appunto sulla curva iperspaziale immagine della serie g_ν^k, si ha la proposizione di cui si giova il sig. Segre (*loc. cit.*, § 11, n° 42) nella ricerca dei punti $(k+1)$-pli della serie.

(**) Abbiamo scelto in modo particolarissimo la curva C: per gli ulteriori ragionamenti non sarebbe necessario che il punto B fosse multiplo *ordinario*, e le conclusioni a cui perverremo potrebbero subito riferirsi a qualunque curva razionale; noi ci siamo attenuti a questo caso per la massima semplicità che esso offre, e perchè di esso soltanto faremo uso nelle ulteriori ricerche.

tale singolarità abbassa di $\sigma_0 + \sigma_1 - 1$ unità il numero dei $2(\nu - 1)$ punti doppi della g^1_ν (*).

Similmente provasi che, date su C due serie lineari $g^1_{s_1}$, $g^1_{s_2}$ proiettive (cioè secate da fasci proiettivi), esistono $s_1 + s_2$ punti che appartengono a gruppi corrispondenti delle due serie; se poi le serie $g^1_{s_1}$, $g^1_{s_2}$ hanno in un punto (n[i] 28 e 31) un punto base rispettivamente del grado σ'_0, σ''_0 e contengono due gruppi corrispondenti dotati ivi d'un punto rispettivamente (σ'_1)-plo, (σ''_1)-plo, allora in tal punto coincidono $\sigma'_0 + \sigma''_0 + \varepsilon$ dei punti comuni alle due serie, ove ε è il più piccolo dei numeri $\sigma'_1 - \sigma'_0$, $\sigma''_1 - \sigma''_0$ (**).

36. Premesse tali considerazioni, supponiamo d'avere una curva C, irreduttibile, dell'ordine n e del genere p, e sia (Γ) un fascio di curve d'ordine m, il quale sechi la C secondo una serie lineare g^1_{mn}. Siano Γ_1, Γ_2 due curve di (Γ) e G_1, G_2 i gruppi da esse determinati su C. Associamo alla curva C una curva C' dello stesso ordine che sechi la C in n^2 punti semplici, che non siano singolari per la g^1_{mn}. Ciò posto, consideriamo il fascio di curve $(C) \equiv (C, C')$, e costruiamo la curva $\Omega^1_{C\Gamma}$ luogo dei punti di contatto delle curve di (C) con quelle di (Γ) (Mem. I, § 1).

Supponiamo che P sia un punto (r)-plo ordinario $(r \geq 1)$ di C e che la serie g^1_{mn} abbia ivi su un ramo R una singolarità $[\sigma_0, \sigma_1]$ (n° 28). Quante intersezioni ha riunite in P, in tal caso, la curva $\Omega^1_{C\Gamma}$ col ramo R?

Sia G_2 il gruppo dotato in P sul ramo R d'un punto (σ_1)-plo. Sia inoltre λ_0 il numero di rami coi quali passa per P la curva generica di (Γ) e ρ_0 il numero di punti infinitamente vicini a P che essa ha inoltre in comune col ramo R. Sia similmente λ_1 il numero

(*) Vedi Cremona: *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, n° 75 (Mem. della R. Acc. delle Scienze di Bologna, t. VI e VII; 1866 e 1867); Battaglini: *Sulle forme binarie di grado qualunque*, n° 5 (Atti Acc. Napoli, t. III, 1867); Guccia: *Due proposizioni relative alle involuzioni di specie qualunque dotate di singolarità ordinarie* (Questi Rend., t. VII, 1893) e *Sulle involuzioni di specie qualunque dotate di singolarità ordinarie* (Ibid., t. VIII, 1894).

(**) Cremona: *Introduz. ad una teoria geom.* etc. etc., n° 24.

di rami coi quali passa per P la curva Γ_2, e ρ_1 il numero di punti infinitamente vicini a P che essa ha inoltre in comune col ramo R. Evidentemente $\lambda_0 + \rho_0 = \sigma_0$ e $\lambda_1 + \rho_1 = \sigma_1$.

Costruiamo una curva irreduttibile, K_3, d'ordine μ sufficientemente grande, in modo che essa sia dotata d'un punto $(\mu - 1)$-plo fuori di P, che passi per P, e che abbia ivi riunite $\alpha + 1$ intersezioni col ramo R, ove $\alpha > \rho_0 + \rho_1$. Consideriamo indi due altre curve K_1, K_2 dell'ordine μ, di cui la prima non passi per P, e l'altra vi passi semplicemente, senza toccarvi la K_3.

Le curve K_1, K_2, K_3 determinano una rete $[K] \equiv [K_1, K_2, K_3]$. Rammentiamo (Mem. I, § 2, n° 10) che, se con $K_2^{\bullet}$ denotiamo la curva generica del fascio (K_2, K_3), le curve $\Omega^1_{(C)(K_1 K_2^{\bullet})}$, $\Omega^1_{(\Gamma)(K_1 K_2^{\bullet})}$, luoghi dei punti ove le curve del fascio $(K_1, K_2^{\bullet})$ hanno rispettivamente un contatto con curve dei fasci (C), (Γ), generano due fasci proiettivi $(\Omega^1_{(C)(K_1 K_2^{\bullet})})$, $(\Omega^1_{(\Gamma)(K_1 K_2^{\bullet})})$, quando $K_2^{\bullet}$ descrive il fascio (K_2, K_3); e che il luogo Σ dei punti comuni alle curve corrispondenti di questi fasci si scinde nelle curve K_1, $\Omega^1_{C\Gamma}$ ed J, ove J è la curva Jacobiana della rete $[K]$. Siccome K_1 ed J non passano per P, per contare le intersezioni riunite in P della curva $\Omega^1_{C\Gamma}$ colla curva K_3, possiamo contare le intersezioni ivi riunite della curva Σ colla K_3.

Per contare tali intersezioni, osserviamo che i fasci $(\Omega^1_{(C)(K_1 K_2^{\bullet})})$, $(\Omega^1_{(\Gamma)(K_1 K_2^{\bullet})})$ secano sulla K_3 due serie lineari proiettive $g^1_{s_1}$, $g^1_{s_2}$ (*), i cui punti comuni sono i punti d'intersezione di Σ con K_3. Quindi le intersezioni riunite in P della curva K_3 colla curva Σ (o colla curva $\Omega^1_{C\Gamma}$) si possono contare, contando il numero dei punti comuni a gruppi corrispondenti delle serie lineari proiettive $g^1_{s_1}$, $g^1_{s_2}$, coincidenti in P.

Vediamo adunque come si comportino nel punto P le due serie lineari proiettive $g^1_{s_1}$, $g^1_{s_2}$ secate su K_3 dai fasci $(\Omega^1_{(C)(K_1 K_2^{\bullet})})$, $(\Omega^1_{(\Gamma)(K_1 K_2^{\bullet})})$. La curva generica del fascio $(\Omega^1_{(C)(K_1 K_2^{\bullet})})$ passa per P con $r - 1$ rami, nessuno dei quali è ivi tangente alla curva K_3 (Mem. I, Teor. II*).

(*) Poniamo per brevità $s_1 = \mu(2n + 2\mu - 3)$, $s_2 = \mu(2m + 2\mu - 3)$.

Quindi la serie $g^1_{s_1}$ ha in P un punto base $(r-1)$-plo. Ma la curva $\Omega^1_{(C)(K_1K_3)}$ del fascio $(\Omega^1_{(C)(K_1K_2)})$ seca la K_3 secondo un gruppo avente in P un punto multiplo di grado maggiore di $r-1$. Difatti il numero d'intersezioni riunite in P delle curve $\Omega^1_{(C)(K_1K_3)}$, K_3 equivale al numero dei punti doppi, coincidenti in P, della serie lineare $g^1_{n\mu}$, secondo cui la curva K_3 è secata dalle curve del fascio (C). Ora la $g^1_{n\mu}$ ha in P un punto di singolarità $[0, r+\alpha]$ (n° 28), e perciò (n° 35) $r+\alpha-1$ dei punti doppi della $g^1_{n\mu}$ coincidono in P; laonde le curve $\Omega^1_{(C)(K_1K_3)}$, K_3 hanno riunite nel punto P $r+\alpha-1$ intersezioni; in altri termini, la serie $g^1_{s_1}$ contiene un gruppo $g^0_{s_1}$ dotato in P d'un punto $(r+\alpha-1)$-plo.

Similmente la curva generica del fascio $(\Omega^1_{(\Gamma)(K_1K_2)})$ passa, *in generale,* per P (Mem. I; Teor. II* se $\lambda_1 > \lambda_0$, Teor. V se $\lambda_1 = \lambda_0$) con $\lambda_0+\lambda_1-1$ rami, essa dunque ha riunite in tal punto con K_3 $\lambda_0+\lambda_1+\tau-1$ intersezioni ($\tau \geq 0$); in altri termini la $g^1_{s_2}$ ha in P un punto base $(\lambda_0+\lambda_1+\tau-1)$-plo. Per cercare il numero d'intersezioni che la curva K_3 ha riunite in P colla curva $\Omega^1_{(\Gamma)(K_1K_3)}$, corrispondente nella proiettività alla $\Omega^1_{(C)(K_1K_3)}$, osserviamo che le curve del fascio (Γ) secano sulla K_3 una serie lineare $g^1_{\mu m}$, la quale ha in P una singolarità $[\lambda_0+\rho_0, \lambda_1+\rho_1]$ (n° 28) (*). E quindi (n° 35) $\lambda_0+\rho_0+\lambda_1+\rho_1-1$ dei punti doppi della serie $g^1_{\mu m}$ coincidono in P; in altri termini, le curve $\Omega^1_{(\Gamma)(K_1K_2)}$, K_3 hanno riunite in P $\lambda_0+\rho_0+\lambda_1+\rho_1-1$ intersezioni.

Riepilogando, le due serie lineari proiettive $g^1_{s_1}$, $g^1_{s_2}$ su K_3 hanno in P due punti base rispettivamente dei gradi $r-1$, $\lambda_0+\lambda_1+\tau-1$, e contengono due gruppi corrispondenti $g^0_{s_1}$, $g^0_{s_2}$ pei quali P è punto rispettivamente $(r-1+\alpha)$-plo, $[(\lambda_0+\lambda_1+\tau-1)+(\rho_0+\rho_1-\tau)]$-plo;

(*) La curva generica del fascio (Γ) ha un punto (λ_0)-plo in P, ma ha inoltre ivi un contatto d'ordine ρ_0 con K_3; perchè ha ivi tal contatto col ramo R di C, e la curva K_3 passa semplicemente per P toccando R_3 secondo un contatto d'ordine $\alpha > \rho_0+\rho_1$ (e quindi $> \rho_0$). Lo stesso dicasi per il contatto in P delle curve Γ_2 e K_3.

e, siccome $\alpha > \rho_0 + \rho_1 - \tau$ (perchè $\alpha > \rho_0 + \rho_1$ e $\tau \geq 0$), $(r-1) + (\lambda_0 + \lambda_1 + \rho_0 + \rho_1 - 1) = (r-1) + (\sigma_0 + \sigma_1 - 1)$, dei punti comuni alle due serie lineari proiettive $g^1_{i_1}$, $g^1_{i_2}$ coincidono nel punto P (n° 35). Cioè, per quanto s'è detto precedentemente, le curve $\Omega^1_{C\Gamma}$, K_3 hanno in P $r + \sigma_0 + \sigma_1 - 2$ intersezioni. Ora, siccome la curva $\Omega^1_{C\Gamma}$ passa per P con $r + \lambda_0 + \lambda_1 - 2$ rami almeno (Mem. I; § 1, Teor. II e segg.), delle $r+\sigma_0+\sigma_1-2 = r+\lambda_0+\lambda_1-2+\rho_0+\rho_1$ intersezioni delle curve $\Omega^1_{C\Gamma}$ e K_3 riunite in P, al massimo $\rho_0 + \rho_1$ son dovute a contatto. E perciò, siccome la curva K_3 ha in P col ramo R della curva C un contatto d'ordine $\alpha_0 > \rho_1 + \rho_0$, ricavasi che la curva $\Omega^1_{C\Gamma}$ ha in P col ramo R $r + \sigma_0 + \sigma_1 - 2$ intersezioni.

Riepilogando:

Dati in un piano una curva C d'ordine n ed un fascio di curve (Γ) d'ordine m, secante la C secondo una serie lineare g^1_{mn};

indicando con (C) un fascio di curve d'ordine n, contenente la curva C, e con $\Omega^1_{C\Gamma}$ la curva luogo dei punti di contatto delle curve di (C) con quelle di (Γ);

se la serie lineare g^1_{mn} ha in un punto P, (r)-plo ordinario della curva C $(r \geq 1)$, e sopra un determinato ramo R la singolarità $[\sigma_0, \sigma_1]$, in tal punto il ramo R ha riunite colla curva $\Omega^1_{C\Gamma}$ $(r-1) + (\sigma_0 + \sigma_1 - 1)$ intersezioni (*).

37. Ed ora supponiamo (n° 32) che la curva C sia dotata di punti multipli ordinari, e che la serie lineare g^1_{mn} si comporti in modo ordinario sui rami uscenti dai punti multipli di C. Allora la curva $\Omega^1_{C\Gamma}$, per la proposizione del n° precedente (per $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = 1$), avrà $r(r-1)$ intersezioni colla curva C in ogni punto (r)-plo di C. La curva $\Omega^1_{C\Gamma}$ è dell'ordine $2n + 2m - 3$ (Mem. I, Teor. I), essa passa con un ramo per ciascuno degli n^2 punti base semplici del fascio (C) (Mem. I, Teor. V), ed in nessuno di essi è tangente a

(*) Questo teorema, fondamentale per la nostra ricerca, si fonda, come s'è visto, su due proposizioni elementari sopra le involuzioni di prima specie sopra una retta e su un notissimo teorema sopra i contatti.

C (*), quindi il numero dei punti doppi della serie g^1_{mn} è:

$$\delta = n(2n + 2m - 3) - n^2 - \Sigma r(r-1),$$

essendo la $\Sigma r(r-1)$ estesa a tutti i punti multipli di C. Introducendo il genere $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{\Sigma r(r-1)}{2}$ della curva C, si ha:

$$\delta = 2(mn + p - 1).$$

Se la serie g^1_{mn} ha in un punto P di C la singolarità $[\sigma_0, \sigma_1]$, in esso le curve $\Omega^1_{C\Gamma}$, C hanno, per la proposizione del n° precedente (per $r = 1$), in tal punto $\sigma_0 + \sigma_1 - 1$ intersezioni, ossia in tal punto coincidono $\sigma_0 + \sigma_1 - 1$ dei punti doppi della g^1_{mn}. Sicchè, se noi volessimo considerare la g^1_ν che s'ottiene dalla g^1_{mn} escludendo da ogni gruppo il punto P contato σ'_0 volte ($\sigma'_0 \leqq \sigma_0$), dovremmo dire che la serie g^1_ν ($\nu = mn - \sigma'_0$) ha:

$$\delta = 2(\nu + p - 1)$$

punti doppi, ma che nella singolarità $[\lambda_0, \lambda_1]$ che essa ha in P (ove $\lambda_0 = \sigma_0 - \sigma'_0$, $\lambda_1 = \sigma_1 - \sigma'_0$) coincidono $\lambda_0 + \lambda_1 - 1$ di tali punti doppi.

Questa proprietà sussiste, per il modo col quale è stata trovata, qualunque sia il numero delle singolarità della g^1_ν, e per la proposizione del n° 32, vale qualunque sia la curva C. Generalizzandola dunque in base alle proposizioni ed alle definizioni precedenti (n[i] 28, 31, 32) si ha la proposizione:

Data su una curva irreduttibile C di genere p una serie lineare di gruppi di punti g^1_ν, essa ammette $2(\nu + p - 1)$ punti doppi; se in un ciclo di C la serie g^1_ν ha la singolarità $[\sigma_0, \sigma_1]$ (n° 31), *in tal ciclo cadono $\sigma_0 + \sigma_1 - 1$ dei punti doppi della serie.*

(*) Perchè altrimenti la curva del fascio (Γ) passante per un tal punto sarebbe ivi tangente a C (Mem. I, Teor. V) e la serie lineare g^1_{mn} avrebbe perciò la singolarità [0, 2] in quel punto, ciò che noi abbiamo escluso (n° 36).

38. Sia data una curva irreduttibile C del genere p, e su di essa una serie lineare g_ν^k. Indicheremo con $G_1, G_2, \ldots, G_k, G_{k+1}$ $k+1$ gruppi linearmente indipendenti di essa. Indicheremo inoltre con N_h il numero dei punti del gruppo $H_h(G_1, G_2, \ldots, G_h, G_{h+1})$, cioè il numero dei punti $(h+1)$-pli della serie lineare ∞^h individuata dai gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_h, G_{h+1}$ $(h=0, 1, \ldots, k)$. Sappiamo (n° 34) che, per tutti i valori di h da 2 a k, se G'_h è un gruppo arbitrario della serie lineare ∞^1 $[G_h, G_{h+1}]$, il gruppo degli N_{h-1} punti (h)-pli della serie lineare $\infty^{h-1}[G_1, G_2, \ldots, G_{h-1}, G'_h]$ descrive una serie lineare $g^1_{N_{h-1}}$, quando G'_h descrive la serie $[G_h, G_{h+1}]$, e che il gruppo dei $2(N_{h-1}+p-1)$ punti doppi (n° 37) della serie $g^1_{N_{h-1}}$ si scinde negli N_h punti $(h+1)$-pli della serie ∞^h $[G_1, G_2, \ldots, G_h, G_{h+1}]$ e negli N_{h-2} punti $(h-1)$-pli della serie $\infty^{h-2}[G_1, G_2, \ldots, G_{h-2}, G_{h-1}]$. Si ha quindi:

$$N_{h-2}+N_h=2(N_{h-1}+p-1). \quad [h=2, \ldots, k;\ N_0=\nu;\ N_1=2(\nu+p-1)]$$

Da questa ricavasi facilmente

$$N_k=(k+1)(\nu+kp-k).$$

Supponiamo che la serie g_ν^k abbia in un ciclo dato di C (n° 30) la singolarità $[\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k]$ (n° 31). Prenderemo i gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_k, G_{k+1}$ della serie g_ν^k in modo tale che il gruppo G_j $(j=1, 2, \ldots, k+1)$ abbia sul ciclo dato un punto (σ_{j-1})-plo. Allora, presi gli h gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_{h-1}, G_h$ $(h=0, 1, \ldots, k)$ ed associando ad essi il gruppo G_{h+i} $(0<i\leqq k-h+1)$, gli $h+1$ gruppi così ottenuti individueranno una serie lineare ∞^h: noi indicheremo con α_h^{h+i} il numero dei punti $(h+1)$-pli di tal serie coincidenti nel ciclo dato. Rifacendo i ragionamenti precedenti e tenendo le stesse notazioni, si vede che la serie $g^1_{N_{h-1}}$ ha sul ciclo dato la singolarità $[\alpha_{h-1}^h, \alpha_{h-1}^{h+1}]$ e che perciò (n° 37) $\alpha_{h-1}^h+\alpha_{h-1}^{h+1}-1$ dei punti doppi della serie $g^1_{N_{h-1}}$ coincidono sul ciclo dato. Si ha quindi la relazione:

$$(1)\quad \alpha_h^{h+1}+\alpha_{h-2}^{h-1}=\alpha_{h-1}^h+\alpha_{h-1}^{h+1}-1 \quad (h=2, 3, \ldots, k;\ \alpha_0^1=\sigma_0;\ \alpha_1^2=\sigma_0+\sigma_1-1).$$

Analogamente a questa:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{h-1}^{h+1}+\alpha_{h-3}^{h-2}=\alpha_{h-2}^{h-1}+\alpha_{h-2}^{h+1}-1\\ \alpha_{h-1}^{h}+\alpha_{h-3}^{h-2}=\alpha_{h-2}^{h-1}+\alpha_{h-2}^{h}-1\end{aligned}\right\}(h>2)$$

e colla sottrazione:

$$\alpha_{h-1}^{h+1}-\alpha_{h-1}^{h}=\alpha_{h-2}^{h+1}-\alpha_{h-2}^{h}.$$

Così continuando, arriverebbesi all'uguaglianza:

$$\alpha_{h-1}^{h+1}-\alpha_{h-1}^{h}=\alpha_{0}^{h+1}-\alpha_{0}^{h}.$$

Ora, per le nostre convenzioni, $\alpha_0^{h+1}=\sigma_h$, $\alpha_0^h=\sigma_{h-1}$, quindi

$$\alpha_{h-1}^{h+1}=\alpha_{h-1}^{h}+\sigma_h-\sigma_{h-1}.$$

E così la (1) diviene:

$$\alpha_{h}^{h+1}-\alpha_{h-1}^{h}=\alpha_{h-1}^{h}-\alpha_{h-2}^{h-1}+\sigma_h-\sigma_{h-1}-1.$$

Da questa per $2\leqq j\leqq k$,

$$\sum_{h=2}^{j}(\alpha_h^{h+1}-\alpha_{h-1}^{h})=\sum_{h=2}^{j}(\alpha_{h-1}^{h}-\alpha_{h-2}^{h-1})+\sigma_j-\sigma_1-(j-1),$$

donde, essendo $\alpha_0^1=\sigma_0$ ed $\alpha_1^2=\sigma_0+\sigma_1-1$ (n° 37),

$$\alpha_j^{j+1}-\alpha_{j-1}^{j}=\sigma_j-j,$$

la quale vale anche per $j=1$.

Perciò

$$\sum_{j=1}^{k}(\alpha_j^{j+1}-\alpha_{j-1}^{j})=\sum_{j=1}^{k}\sigma_j-\frac{k(k+1)}{2},$$

ed, essendo $\alpha_0^1=\sigma_0$,

$$\alpha_k^{k+1}=\sum_{j=0}^{k}\sigma_j-\frac{k(k+1)}{2}.$$

Tale è quindi il numero di punti $(k+1)$-pli della serie g_ν^k coincidenti nel ciclo dato.

Riepilogando, si hanno i due teoremi:

a) (Teorema di de Jonquières-Brill). *Data su una curva*

irreduttibile C del genere p una serie lineare g_v^k, essa possiede $(k+1)(v+kp-k)$ punti $(k+1)$-pli (*).

b) (Teorema di Segre). *Data su una curva C del genere p una serie lineare g_v^k dotata in un ciclo di C della singolarità $[\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k]$* (n° 31), *in tal ciclo cadono $\sum_{i=1}^{k} \sigma_i - \frac{k(k+1)}{2}$ dei punti $(k+1)$-pli della serie* (**).

§ 5.

Spezzamenti della curva $\Omega_{C\Gamma}^k$ relativa ad un fascio di curve (C) e ad un sistema lineare ∞^k di curve $[\Gamma]^k$. Luogo dei punti sestatici d'un fascio di curve piane d'ordine $n\,(>2)$. Luogo dei punti ove le curve d'un fascio d'ordine n hanno contatti d'ordine $\frac{m(m+3)}{2}$ con curve dell'ordine $m<n$ $(m>2)$. Due teoremi sui contatti delle curve d'un fascio con quelle d'un sistema lineare ∞^k in un punto base del fascio. Sui contatti d'ordine massimo delle curve d'un fascio con quelle d'un fascio o d'una rete.

39. Sia C un fascio irreduttibile di curve dell'ordine n, e $[\Gamma]^k$

(*) Questo teorema, il quale è un caso particolare di un teorema del de Jonquières nel *Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré r qui satisfont à des condition données, avec une courbe fixe du degré m*, etc. (Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXVI, 1866, pp. 289-321), fu dimostrato dal Brill nella memoria citata in principio di questo lavoro. Vedansi anche le dimostrazioni di Castelnuovo e di Segre nelle memorie citate.

(**) Questo teorema, nel caso di $p=0$, fu dato dal Guccia nella Nota: *Due proposizioni relative alle involuzioni*, etc. (Questi Rend. t. VII, 1893), ma già fin dal 1891 egli se ne era servito nei suoi corsi universitari. Nel caso della *serie canonica* sopra una curva di genere qualunque venne dato dall'Hurwitz nella Memoria: *Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich* (Math. Ann. t. XLI, 1892). Nella sua massima generalità fu dato dal Segre nel § 43 della citata memoria.

un sistema lineare ∞^k di curve dell'ordine m, nessuna curva del quale abbia parti in comune con curve del fascio (C).

La curva $\Omega^k_{C\Gamma}$, luogo dei punti ove le curve del fascio (C) hanno contatto d'ordine k con curve del sistema $[\Gamma]^k$, è (Mem. I, Teor. XVII) dell'ordine $(k+1)\dfrac{(2n-3)k+2m}{2}$. Supposto che esista una curva L dell'ordine μ, luogo d'un punto di singolarità $[\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k]$ per la serie lineare g^k_{mn} secata dalle curve di $[\Gamma]^k$ sulla curva del fascio (C) passante ivi (n° 28), *la curva L, contata* $\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_k - \dfrac{k(k+1)}{2}$ *volte* (n° 38), *farà parte di* $\Omega^k_{C\Gamma}$.

40. Sia (C) un fascio irreduttibile di curve dell'ordine n e (Γ) un altro fascio di curve dell'ordine m, tale che non si riduca al fascio (C) e ad una curva fissa. Supposto che una certa curva L, contata l volte, faccia parte di una curva di (C) $(l > 0)$, contata λ_0 volte, faccia parte di tutte le curve di (Γ), e contata λ_1 volte, faccia parte di una curva di (Γ) $(0 \leqq \lambda_0 \leqq \lambda_1)$, vogliamo vedere quante volte la curva L dovrà contarsi come parte della curva $\Omega^1_{C\Gamma}$, relativa ai due fasci dati (Mem. I, Teor. I). A tal uopo, basterà osservare che ogni punto di L sarà (Mem. I: Teor. IV, per $r=0$, $r'=l$, $\rho=\lambda_0$, $\rho'=\lambda_1$, se $\lambda_1 > \lambda_0$, ovvero Teor. II, per $r=0$, $r'=l$, $\rho=\lambda_0$, $\rho'=\lambda_1+1$ se $\lambda_1=\lambda_0$), in generale, un punto $(l+\lambda_0+\lambda_1-1)$-plo per $\Omega^1_{C\Gamma}$. Quindi la curva L, contata $l+\lambda_0+\lambda_1-1$ volte, fa parte di $\Omega^1_{C\Gamma}$ (*).

Sia ora (C) un fascio di curve, irreduttibile, dell'ordine n, e $[\Gamma]^k$ un sistema lineare di curve dell'ordine m. Supporremo soltanto che non esista un fascio di curve, nel sistema $[\Gamma]^k$, il quale si scinda nel fascio (C) ed in una curva residuale (semplice o composta od anche non esistente nel caso di $n=m$).

Sia L una curva per la quale supporremo:

1° che faccia parte, contata l volte $(l > 0)$, di una curva del fascio (C);

2° che, contata λ_0 volte, appartenga alla curva generica del sistema

(*) Per $\lambda_0 = 0$ cfr. la Mem. I, n° 8.

$[\Gamma]^k$, e che, per tutti i valori di i da o a $k-1$ faccia parte, contata λ_{i+1} volte, della curva generica del sistema lineare $\infty^{k-i-1}[\Gamma]^{k-i-1}$ contenuto nel sistema $\infty^{k-i}[\Gamma]^{k-i}$, ove $\lambda_0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_k$.

Ciò posto, domandiamo: quante volte la curva L dovrà contarsi come parte della curva $\Omega^k_{C\Gamma}$, relativa al fascio (C) ed al sistema $[\Gamma]^k$, data dalla costruzione accennata nella Mem. I: Teor. XVI, per $k > 1$ e Teor. I, per $k = 1$?

A tal uopo scegliamo $k+1$ curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_k, \Gamma_{k+1}$, linearmente indipendenti, nel sistema $[\Gamma]^k$, in modo tale che il sistema $\infty^{k-i}[\Gamma_{i+1}, \Gamma_{i+2}, \ldots, \Gamma_k, \Gamma_{k+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ sia appunto quel sistema contenente, come curva fissa da contarsi λ_i volte, la curva L.

Prese le i curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i$, associeremo ad esse la curva Γ_{i+h} $(0 \leqq i \leqq k;\ h \leqq k-i+1)$, ed indicheremo con ρ_i^{i+h} il numero di volte secondo cui la curva L fa parte della curva $\Omega^i_{(C)(\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_i\Gamma_{i+h})}$ (Mem. I, Teor. XVI) relativa al fascio (C) ed al sistema lineare $\infty^i[\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_i, \Gamma_{i+h}]$.

Indichiamo con Γ_i^* la curva generica del fascio (Γ_i, Γ_{i+1}). La curva $\Omega^{i-1}_{(C)(\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{i-1}\Gamma_i^*)}$ $(i \geqq 2)$ descrive (Mem. I, Teor. XVI) un fascio quando Γ_i^* descrive il fascio (Γ_i, Γ_{i+1}). Della curva generica di tal fascio, $(\Omega^{i-1}_{(C)(\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{i-1}\Gamma_i^*)})$, fa parte, secondo le nostre convenzioni, la curva L contata ρ_{i-1}^i volte, ed esiste una curva (la $\Omega^{i-1}_{(C)(\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{i-1}\Gamma_{i+1})}$) contenuta nel fascio, di cui fa parte L, contata ρ_{i-1}^{i+1} volte. Quindi della curva luogo dei punti di contatto delle curve del fascio $(\Omega^{i-1}_{(C)(\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{i-1}\Gamma_i^*)})$ con quelle del fascio (C) fa parte L, contata (per quanto precedentemente abbiamo detto) $l + \rho_{i-1}^i + \rho_{i-1}^{i+1} - 1$ volte; ma tal curva si scinde nelle curve $\Omega^{i-2}_{(C)(\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{i-2}\Gamma_{i-1})}$, $\Omega^i_{(C)(\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_i\Gamma_{i+1})}$ (Mem. I, Teor. XVI), e di queste fa parte la L contata, per le convenzioni precedenti, ρ_{i-2}^{i-1}, ρ_i^{i+1} volte; si ha quindi la relazione:

$$(1) \qquad \rho_i^{i+1} + \rho_{i-2}^{i-1} = \rho_{i-1}^{i+1} + \rho_{i-1}^i + l - 1 \qquad (i = 2, 3, \ldots, k;\ \rho_0^i = \lambda_{i-1}).$$

Collo stesso procedimento (per $i > 2$) si proverebbe:

$$\rho_{i-1}^{i+1} + \rho_{i-3}^{i-2} = \rho_{i-2}^{i+1} + \rho_{i-2}^{i-1} + l - 1$$

e

$$\rho^{i}_{i-1} + \rho^{i-2}_{i-3} = \rho^{i}_{i-2} + \rho^{i-1}_{i-2} + l - 1$$

dalle quali, sottraendo,

$$\rho^{i+1}_{i-1} - \rho^{i}_{i-1} = \rho^{i+1}_{i-2} - \rho^{i}_{i-2},$$

e, così continuando, s'avrebbe

$$\rho^{i+1}_{i-i} + \rho^{i}_{i-1} = \rho^{i+1}_{0} - \rho^{i}_{0} = \lambda_i - \lambda_{i-1},$$

laonde

$$\rho^{i+1}_{i-1} = \rho^{i}_{i-1} + \lambda_i - \lambda_{i-1}.$$

Con questa la (1) diviene:

$$\rho^{i+1}_{i} - \rho^{i}_{i-1} = \rho^{i}_{i-1} - \rho^{i-1}_{i-2} + \lambda_i - \lambda_{i-1} + l - 1,$$

e da questa si ha facilmente:

$$\rho^{k+1}_{k} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i + \frac{k(k+1)}{2}(l-1).$$

Tale è quindi il numero di volte secondo cui L fa parte di $\Omega^{k}_{C\Gamma}$.

Riepilogando:

Teorema XIX. — *Dati nel piano un fascio di curve* (C) *d'ordine* n, *irreduttibile, ed un sistema lineare* ∞^{k} *di curve dell'ordine* m, $[\Gamma]^{k}$, *tale che non contenga fasci ridotti nel fascio* (C) *ed in eventuali curve fisse,*

se L *è una certa curva la quale contata* l *volte* $(l > 0)$ *fa parte di una curva di* (C), *contata* λ_0 *volte fa parte della curva generica del sistema* $[\Gamma]^{k}$, *e, per tutti i valori di* i *da* 0 *a* $k-1$, *fa parte, contata* λ_{i+1} *volte, della curva generica del sistema lineare* ∞^{k-i-1} $[\Gamma]^{k-i-1}$, *contenuto nel sistema lineare* ∞^{k-i} $[\Gamma]^{k-i}$ $(0 \leqq \lambda_0 \leqq \lambda_1 \leqq \ldots \leqq \lambda_k)$;

allora della curva $\Omega^{k}_{C\Gamma}$, *luogo dei punti di contatto d'ordine* k *delle curve di* (C) *con quelle di* $[\Gamma]^{k}$ (Mem. I, Teor. XVI), *fa parte la curva* L *contata* $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i + \frac{k(k+1)}{2}(l-1)$ *volte.*

OSSERVAZIONE.—Il caso $l=0$ non si può far rientrare nel precedente, ma rientra nel caso contemplato nel n° 39 (non è però da credersi che si possa farlo rientrare ivi, in generale, sostituendo ivi alle σ_i le λ_i).

41. Dato un fascio di curve (C) d'ordine $n\,(>1)$, irreduttibile, la curva Σ, luogo dei flessi delle curve del fascio, è (Mem. I, Teor. VII, nota) dell'ordine $6n-6$, passa con $3(2r-1)$ rami (Mem. I, Teor. XIV, nota) per un punto base (r)-plo, a tangenti mobili, del fascio (C) (e quindi con 3 rami per ogni punto base semplice), e con $3r+3r'-4$ rami (Mem. I, Teor. X, per $\rho_1=0$, $\rho_2=1$) (*) per un punto base (r)-plo del fascio $(r \geq 0)$, ove passi una curva del fascio con $r'\,(>r)$ rami.

Se il fascio (C) contiene una curva di cui faccia parte una curva L, irreduttibile, dell'ordine ν, contata l volte, la curva L farà parte di Σ, e precisamente dovrà contarsi $3(l-1)$ volte (n° 40, per $k=2$, $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=0$) se $\nu>1$, dovrà contarsi $3l-2$ volte (n° 40, per $k=2$, $\lambda_0=\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$) se $\nu=1$ (cioè se L è una retta).

Riepilogando:

TEOREMA XX.—*Dato nel piano un fascio di curve (C), irreduttibile, dell'ordine n,*

se una curva di (C) si scinde in una curva L, irreduttibile, dell'ordine ν, contata l volte, ed in una curva residuale C_1 (semplice o composta) *dell'ordine $n-\nu l$,*

della curva Σ (d'ordine $6n-6$), *luogo dei flessi delle curve del fascio (C), fa parte L, contata $3(l-1)$ o $3l-2$ volte, secondo che sia $\nu>1$ o $\nu=1$.*

42. Dato nel piano un fascio di curve, irreduttibile, (C), dell'ordine $n\,(>2)$, la curva luogo dei punti ove coniche, proprie o degeneri, hanno un contatto sipunto colle curve di (C), è dell'or-

(*) Cfr. anche Guccia: *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotate di singolarità ordinarie*, Memoria II (Questi Rend. t. IX, 1895), Teor. XLVII, che nella Mem. I ho dimenticato di citare.

dine $30n-33$ (Mem. I, Teor. XVII, per $m=2$, $k=5$), e passa con $15(2r-1)$ rami (Mem. I, Teor. XVIII, per $k=5$, $\sigma=0$, $\sigma'=1$) per un punto base (r)-plo, a tangenti mobili, del fascio (C).

Ma di tal curva fa parte evidentemente la curva Σ, luogo dei flessi del fascio, contata una volta (n° 39). Resta una curva S, la quale è luogo dei punti ove le curve di (C) hanno contatto sipunto con coniche proprie, ossia è il luogo dei punti *sestatici* (*) delle curve del fascio (C).

La curva S è quindi dell'ordine $24n-27$ e passa con $12(2r-1)$ rami per un punto base (r)-plo, a tangenti mobili, del fascio.

Se il fascio (C) contiene una curva decomposta in una curva L irreduttibile dell'ordine ν, contata l volte, ed in una residuale curva C_1 (semplice o composta) dell'ordine $n-\nu l$ $(l>0)$, della curva composta $S\Sigma$ farà parte L, e dovrà contarsi $15(l-1)$ volte (n° 40, per $k=5$, $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=0$), se $\nu>2$; dovrà contarsi $15l-14$ volte (n° 40, per $k=5$, $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$, $\lambda_5=1$), se $\nu=2$; dovrà finalmente contarsi $15l-11$ volte (n° 40, per $k=5$, $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=\lambda_4=1$, $\lambda_5=2$), se $\nu=1$; quindi la curva L farà parte di S, e dovrà contarsi (Teor. XX) $12(l-1)$, $12l-11$, $12l-9$ volte secondo che $\nu>2$, $\nu=2$, $\nu=1$.

Riepilogando:

Teorema XXI. — *Dato nel piano un fascio di curve (C) d'or-*

(*) Secondo la denominazione del Cayley il quale determinò il loro numero in una curva algebrica d'ordine n dotata di soli punti doppi (Phil. Trans., 1865 e Comptes Rendus, 1866). La determinazione del numero dei punti sestatici in curve dotate di singolarità qualunque fu fatta dall'Halphen nella Memoria: *Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du 3me degré* (Bull. de la Soc. Math. de France, 1875, t. IV). Tal numero può del resto, con semplicità, trovarsi mediante i due teoremi di de Jonquières-Brill e di Segre esposti nel n° 38 (vedi Segre, loc. cit., n° 45). L'abbassamento che sul numero dei punti sestatici di una curva generale dell'ordine n producono punti doppi o cuspidi ordinarie della curva si può però trovare con osservazioni molto più semplici: vedi Gerbaldi: *Sui punti sestatici delle curve algebriche piane* (questi Rendiconti, t. IV, 1890).

dine $n(>2)$, irreduttibile, la curva S, luogo dei punti sestatici delle curve del fascio, è dell'ordine $24n-27$, e passa con $12(2r-1)$ rami per ogni punto base (r)-plo, a tangenti mobili, del fascio (C) (*).

Se il fascio (C) contiene una curva decomposta in una curva C_t dell'ordine $n-\nu l$ (semplice o composta), *ed in una curva L, irreduttibile, dell'ordine ν, contata l volte $(l>0)$, la curva L farà parte di S, e dovrà contarsi $12l-12$, $12l-11$, $12l-9$ volte, secondo che $\nu>2$, $\nu=2$, $\nu=1$.*

43. Più in generale, dato nel piano un fascio irreduttibile di curve, (C), dell'ordine $n(>3)$, la curva S_m, luogo dei punti ove le curve del fascio hanno contatto $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$-punto con curve dell'ordine m $(2<m<n)$, irreduttibili o no, è dell'ordine $\frac{m(m+1)(m+2)(2nm+6n-3m-5)}{8}$ $\left[\text{Teor. XVII, per } k=\frac{m(m+3)}{2}\right]$.

Contrariamente a ciò che avviene per la curva luogo dei contatti sipunti delle curve di (C) colle coniche proprie o degeneri del piano, *per qualunque valore di $\mu(<m)$, la curva S_μ, luogo dei punti di contatto $\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}$-punto delle curve di (C) con curve dell'ordine μ, non fa parte di S_m $(m>2)$.*

Basterà infatti dimostrare (n° 39) che un punto ove una curva C del fascio (C) ha contatto $\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}$-punto con una curva dell'ordine μ, non è, in generale, punto $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$-plo della serie lineare, d'ordine mn e dimensione $\frac{m(m+3)}{2}$, secata su C da tutte le curve dell'ordine m.

(*) Per mezzo del Teor. XVI della Mem. I, si potrebbe agevolmente ricavare qual sia la moltiplicità della curva composta $S\Sigma$ (e quindi di S) in un punto base (r)-plo del fascio, ove passi una curva del fascio con $r'(>r)$ rami.

E perciò sarà sufficiente dimostrare che, essendo $0 < \mu < m$ (con μ ed m interi), ed l un intero positivo tale che $l\mu \leqq m$, per $m > 2$, si ha sempre:

$$(1)\quad l\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}+\frac{(m-l\mu)(m-l\mu+3)}{2}<\frac{(m+1)(m+2)}{2}\ (*).$$

Difatti, osserviamo che, se σ e ν sono due numeri positivi tali che $\sigma+\nu=m$, è

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}=\frac{(\sigma+1)(\sigma+2)}{2}+\frac{\nu(\nu+3)}{2}+\sigma\nu,$$

e perciò

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}\geqq\frac{(\sigma+1)(\sigma+2)}{2}+\frac{\nu(\nu+3)}{2},$$

il segno d'uguaglianza sussistendo solo nei casi di $\sigma=0$ ovvero $\nu=0$.

Quindi

$$(2)\quad \frac{(l\mu+1)(l\mu+2)}{2}+\frac{(m-l\mu)(m-l\mu+3)}{2}\leqq\frac{(m+1)(m+2)}{2},$$

e l'uguaglianza potrà sussistere solo se $m=l\mu$ (perchè $l\mu>0$). Ma, se $l\mu=m$, essendo $0<\mu<m$, sarà $l>1$, e poichè $m>2$, sarà $\mu l>2$, $\mu^2 l>2$. Intanto:

$$(3)\quad \frac{(l\mu+1)(l\mu+2)}{2}-\frac{l(\mu+1)(\mu+2)}{2}=\frac{1}{2}(l-1)(l\mu^2-2),$$

(*) Se P è un punto ove una curva C del fascio ha contatto $\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}$-punto con una curva L dell'ordine μ, la curva composta di L, contata l volte, e della curva K, dell'ordine $m-\mu l$, avente il massimo contatto [in generale $\frac{(m-l\mu)(m-l\mu+3)}{2}$-punto] con C in P, ha ivi $\frac{l(\mu+1)(\mu+2)}{2}+\frac{(m-l\mu)(m-l\mu+3)}{2}$ intersezioni riunite con C.

sicchè, quando $\mu l = m$, sarà certamente

$$\frac{(l\mu + 1)(l\mu + 2)}{2} > \frac{l(\mu + 1)(\mu + 2)}{2}$$

e quindi per la (2) (che in tal caso è un'uguaglianza), sarà

$$\frac{l(\mu + 1)(\mu + 2)}{2} + \frac{(m - l\mu)(m - l\mu + 3)}{2} < \frac{(m + 1)(m + 2)}{2}.$$

Ci resta adunque a dimostrare la (1) quando $l\mu < m$. Allora la (2) deve scriversi:

$$(2') \quad \frac{(l\mu + 1)(l\mu + 2)}{2} + \frac{(m - l\mu)(m - l\mu + 3)}{2} < \frac{(m + 1)(m + 2)}{2}.$$

La (1) si verifica subito quando $l\mu = 1$ ($l = 1$, $\mu = 1$); quando poi $l\mu \geqq 2$, anche $l\mu^2 \geqq 2$, quindi per la (3)

$$\frac{(l\mu + 1)(l\mu + 2)}{2} \geqq \frac{l(\mu + 1)(\mu + 2)}{2}$$

e da questa e dalla (2') si ricava la (1).

La curva S_m è quindi luogo dei punti ove le curve del fascio (C) hanno contatto $\frac{(m + 1)(m + 2)}{2}$-punto con curve d'ordine m, in generale irreduttibili. Essa passa, in generale, con $\frac{m(m + 1)(m + 2)(m + 3)(2r - 1)}{8}$ rami [Mem. I, Teor. XVIII, per $k = \frac{m(m + 3)}{2}$, $\sigma = 0$, $\sigma' = 1$] per ogni punto base (r)-plo, a tangenti mobili, del fascio (C) (e quindi con $\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{8}$ rami per ogni punto base semplice).

Supposto ora che una certa curva L, irreduttibile, dell'ordine ν, faccia parte, contata l volte ($l > 0$), di una curva del

fascio (C), se $\nu > m$, tal curva farà parte di S_m, e dovrà contarsi (Teor. XIX, per $k = \frac{m(m+3)}{2}$, $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{\frac{m(m+3)}{2}} = 0$)

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(l-1)}{8} \text{ volte.}$$

Supponiamo invece che sia $\nu \leqq m$, e sia h quell'intero per cui si abbia $h\nu \leqq m < (h+1)\nu$. Allora, per tutti i valori di i da 1 ad h, esiste un sistema lineare $\infty^{\frac{(m-i\nu)(m-i\nu+3)}{2}}$ contenuto nel sistema delle curve dell'ordine m e costituito da tutte le curve dell'ordine $m - i\nu$ accoppiate alla curva L, contata i volte. Sicchè la curva L farà parte di S_m, ma dovrà contarsi (Teor. XIX)

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{8}(l-1) + \sum_{i=1}^{h} \frac{(m-i\nu+1)(m-i\nu+2)}{2}$$

volte.

Riepilogando:

Teorema XXII. — *Dato nel piano un fascio irreduttibile di curve, (C), dell'ordine $n (> 3)$,*

la curva S_m $(2 < m < n)$, luogo dei punti ove le curve del fascio son toccate secondo un contatto $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$-punto da curve dell'ordine m, in generale (*) irreduttibili, è dell'ordine

$$\frac{m(m+1)(m+2)(2nm+6n-3m-5)}{8};$$

essa passa, in generale, con $\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(2r-1)}{8}$ rami per un punto base (r)-plo, a tangenti mobili, del fascio (C) (**).

Se esiste una curva L, irreduttibile, dell'ordine ν, che, contata l volte, faccia parte di una curva del fascio C $(l > 0)$, allora della

---

(*) La frase *in generale* va intesa nel senso che solo un numero finito di punti di S_m sono tali che la corrispondente curva d'ordine m si scinda.

(**) Non tornerebbe difficile trovare (per mezzo del Teor. XVI e dei teoremi del § 1 della Mem. I) il numero di rami coi quali S_m passa per punti base (r)-pli del fascio, ove una curva di questo passi con $r' (> r)$ rami.

rva S_m fa parte L, e questa, se $\nu > m$, deve contarsi

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{8}(l-1)$$

lte, e, se invece $\nu \leq m$, deve contarsi

$$\frac{m+1)(m+2)(m+3)}{8}(l-1)+\sum_{i=1}^{h}\frac{(m-i\nu+1)(m-i\nu+2)}{2}$$

lte, ove h è il quoziente intero, per difetto, della divisione di m per ν.

44. Dato nel piano un fascio di curve (C) ed un sistema li-are ∞^k di curve $[\Gamma]^k$, sia P un punto base semplice, a tangente obile, del fascio (C). Supporremo che P sia un punto generico l piano rispetto al sistema $[\Gamma]^k$, e supporremo inoltre che non esi-t nessuna curva, passante per P, la quale faccia contemporanea-ente parte di una curva del fascio (C) e di curve del sistema $[\Gamma]^k$.

La curva $\Omega^k_{C\Gamma}$, luogo dei punti di contatto d'ordine k delle rve del fascio (C) con quelle del sistema $[\Gamma]^k$, passa per P, in nerale, con $\frac{k(k+1)}{2}$ rami (Mem. I, Teor. XVIII, Oss. 1).

Sia C una curva (o parte di curva) del fascio (C), la quale cchi in P la curva $\Omega^k_{C\Gamma}$. È chiaro che uno dei punti $(k+1)$-pli lla serie lineare ∞^k, secata su C dalle curve di $[\Gamma]^k$, cade in P: altri termini, C ha ivi un contatto $(k+1)$-punto con una curva l sistema $[\Gamma]^k$. Esistono quindi, in generale, $\frac{k(k+1)}{2}$ curve del scio (C) aventi in P contatto $(k+1)$-punto con curve del sistema eare $[\Gamma]^k$.

Riepilogando:

Teorema XXIII.—*Dati nel piano un fascio di curve (C) ed un stema lineare ∞^k di curve, $[\Gamma]^k$,*

se P è un punto del piano, generico rispetto al sistema $[\Gamma]^k$, il ale sia punto base semplice a tangente mobile del fascio (C), e sia le che nessuna curva, passante ivi, faccia parte contemporaneamente curve del sistema $[\Gamma]^k$ e del fascio (C),

allora, in generale, esistono $\frac{k(k+1)}{2}$ *curve del fascio* (C) *aventi in* P *contatto* $(k+1)$*-punto con curve del sistema* $[\Gamma]^k$, *e tali curve sono ivi tangenti ai* $\frac{k(k+1)}{2}$ *rami della curva* $\Omega^k_{C\Gamma}$, *luogo dei contatti d'ordine* k *delle curve del fascio* (C) *con quelle del sistema* $[\Gamma]^k$ (*).

45. Con simili considerazioni, dall'Oss. II del Teor. XVIII (Mem. I), si ricava il

Teorema XXIV.—*Dati nel piano un fascio di curve* (C), *d'ordine* n, *ed un sistema lineare* ∞^k *di curve,* $[\Gamma]^k$, *d'ordine* m,

se P *è un punto base* (r)*-plo del fascio* (C), *tale che i gruppi di tangenti ivi alle singole curve del fascio costituiscano una involuzione di raggi, senza raggi base, di grado* r *e prima specie,*

se P *è inoltre punto base* (σ)*-plo* $(\sigma \geqq k)$ *del sistema* $[\Gamma]^k$, *tale che i gruppi di tangenti ivi alle singole curve del sistema costituiscano un'involuzione di raggi, senza raggi base, di grado* σ *e specie* k,

se inoltre per P *non passano curve che siano contemporaneamente parti di curve del fascio* (C) *e del sistema* $[\Gamma]^k$;

allora esistono, in generale, $(k+1)\sigma + \frac{k(k+1)}{2}(2r-1)$ *curve del fascio* (C) *aventi in* P $r\sigma + k + 1$ *intersezioni riunite con curve del sistema* $[\Gamma]^k$, *e tali curve sono ivi tangenti alla curva* $\Omega^k_{C\Gamma}$, *luogo dei punti ove le curve del fascio* (C) *hanno un contatto d'ordine* k *con quelle del sistema* $[\Gamma]^k$ (**).

46. Sia (C) un fascio irreduttibile di curve d'ordine n, e $[\Gamma]$ una rete irreduttibile di curve dell'ordine m. Supporremo che non

---

(*) Se esistessero più di $\frac{k(k+1)}{2}$ curve del fascio (C) toccanti ivi curve di $[\Gamma]^k$ secondo contatti d'ordine k, allora la curva $\Omega^k_{C\Gamma}$ passerebbe, necessariamente, con $\frac{k(k+1)}{2}+1$ rami, almeno, per P, ed ogni curva del fascio avrebbe perciò un contatto $(k+1)$-punto con una curva di $[\Gamma]^k$ in P.

(**) Per $m=1$, $k=1$, $\sigma=1$, cfr. Guccia: *Ricerche* etc., etc., Mem. II, Teor. XXXVIII.

esista curva del fascio (C) che abbia parti in comune con curve della rete. Prendiamo tre curve linearmente indipendenti $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ nella rete e consideriamo la curva Γ_2^* variabile nel fascio individuato da Γ_2 e da Γ_3. La curva $\Omega^1_{(C)(\Gamma_1\Gamma_2^*)}$ luogo dei punti di contatto delle curve del fascio (C) con quelle del fascio (Γ_1, Γ_2^*) genera, come sappiamo, un fascio $(\Omega^1_{(C)(\Gamma_1\Gamma_2^*)})$, d'ordine $2n + 2m - 3$ quando la curva Γ_2^* descrive il fascio (Γ_2, Γ_3) (Mem. I, n° 9).

Indicheremo con I_b il numero delle intersezioni di due curve del fascio $(\Omega^1_{(C)(\Gamma_1\Gamma_2^*)})$ che avvengono in punti base del fascio (C) o della rete $[\Gamma]$, con I_d il numero delle intersezioni di due curve del fascio $(\Omega^1_{(C)(\Gamma_1\Gamma_2^*)})$ che avvengono in punti (r)-pli della curva Γ_1 o di curve del fascio (C) $(r \geqq 2)$, o in punti (ρ)-pli $(\rho \geqq 3)$ di curve della rete, con σ il numero dei punti doppi della serie lineare secata su Γ_1 dalle curve del fascio (C), con ρ il numero dei residuali punti base del fascio $(\Omega^1_{(C)(\Gamma_1\Gamma_2^*)})$ ossia di quei punti ove due, e perciò infinite, curve della rete toccano curve del fascio (C). Si ha quindi la relazione

$$(1) \qquad (2n + 2m - 3)^2 = I_b + I_d + \sigma + \rho.$$

Se il fascio (C) e la rete (Γ) sono generali, è $I_b = n^2$ (Mem. I, Teor. V), $I_d = 3(n-1)^2$ (Mem. I, Teor. II*), $\sigma = m(2n + m - 3)$ (n° 37), si ha quindi:

$$\rho = 3(m^2 + 2mn - 2n - 3m + 2).$$

Quindi:

Teorema XXV. — *Dati nel piano un fascio di curve (C), generale, dell'ordine n, ed una rete di curve $[\Gamma]$, generale, dell'ordine m, esistono, in generale, $3(m^2 + 2mn - 2n - 3m + 2)$ punti del piano ove una curva del fascio è tangente ad infinite curve della rete* (*).

(*) La formola (1) permetterebbe la determinazione del numero di tali punti qualunque siano il fascio (C) e la rete $[\Gamma]$, escluso però il caso dell'esistenza di curve multiple che faccian parte di curve del fascio o della rete. In tal caso bisognerebbe considerare l'effetto che lo spezzamento delle curve $\Omega^1_{(C)(\Gamma_1\Gamma_2^*)}$ produce nei due membri della (1).

47. Sia (C) un fascio irreduttibile di curve d'ordine n, e (Γ) un altro fascio irreduttibile di curve d'ordine m. Supponiamo che nessuna curva del piano sia contemporaneamente parte di curve del fascio (C) e di quelle del fascio (Γ) e che nessuna curva, contata più volte, faccia parte di una curva di (C) o di una curva di (Γ). Indichiamo con $[\Gamma]$ una rete di curve dell'ordine m che contenga il fascio (Γ). Consideriamo le $(2n+2m-3)(6n+3m-9)$ intersezioni della curva $\Omega^1_{C\Gamma}$, luogo dei punti di contatto delle curve del fascio (C) con quelle di (Γ) (Mem. I, Teor. I), colla curva $\Omega^2_{C\Gamma}$ luogo dei contatti tripunti delle curve del fascio (C) con quelle della rete $[\Gamma]$ (Mem. I, Teor. VII). Indicheremo con J_b il numero di tali intersezioni che cadono nei punti base dei fasci (C), (Γ), con J_d il numero di quelle che cadono nei punti (r)-pli $(r \geqq 2)$ di curve del fascio (C) od in punti (ρ)-pli $(\rho \geqq 3)$ di curve del fascio (Γ), con ρ il numero dei punti ove una curva del fascio (C) è tangente ad infinite curve della rete $[\Gamma]$, con τ il numero dei punti ove una curva di (C) ha contatto tripunto con una curva di (Γ). Si ha evidentemente la relazione:

$$(2)\qquad (2n+2m-3)(6n+3m-9) = J_b + J_d + \rho + \tau.$$

Nel caso in cui i fasci (C) e (Γ) siano *generali*, la curva $\Omega^1_{C\Gamma}$ passa con un ramo (Mem, I, Teor. V) per ognuno degli n^2 punti base del fascio (C), e la curva $\Omega^2_{C\Gamma}$ passa ivi con 3 rami (Mem. I, Teor. XIV), nessuno dei quali è ivi, in generale, tangente ad $\Omega^1_{C\Gamma}$; quindi quivi cadono 3 intersezioni di $\Omega^1_{C\Gamma}$ con $\Omega^2_{C\Gamma}$, e per conseguenza $J_b = 3n^2$. Similmente, per ognuno dei $3(n-1)^2$ punti doppi di curve del fascio (C) la curva $\Omega^1_{C\Gamma}$ e la curva $\Omega^2_{C\Gamma}$ passano rispettivamente con uno e con due rami, e non sono ivi tangenti (Mem. I, Teor. II* e Teor. X), quindi $J_d = 6(n-1)^2$.

Inoltre $\rho = 3(m^2 + 2mn - 2n - 3m + 2)$ (Teor. XXV), quindi

$$\tau = 3(n^2 + m^2 + 4mn - 6n - 6m + 5).$$

Cioè:

Dati nel piano due fasci (C), (Γ), generali, degli ordini n ed m,

esistono $3(n^2 + m^2 + 4mn - 6n - 6m + 5)$ *punti ove curve dei due fasci hanno contatto tripunto* (*).

48. Siano (C) e $[\Gamma]$ un fascio ed una rete di curve, generali, degli ordini n, m. La curva $\Omega^2_{C\Gamma}$ luogo dei contatti tripunti delle curve di (C) con quelle di $[\Gamma]$, passa con 3 rami a tangenti distinte (Mem. I, Teor. XIV) per ognuno degli n^2 punti base del fascio (C), ed ha un punto doppio ordinario (Mem. I, Teor. X) in ognuno dei $3(n-1)^2$ punti doppi di curve di (C), ed in ognuno di essi ha per tangenti le tangenti ivi alla curva di (C) passante ivi. Si può vedere facilmente che la curva $\Omega^2_{C\Gamma}$ non ha, in generale, altri punti multipli fuori di questi. Il suo ordine è (Mem. I, Teor. VII) $6n + 3m - 9$, quindi il suo genere è

$$\pi = \frac{1}{2}(6n + 3m - 10)(6n + 3m - 11) - 3n^2 - 3(n-1)^2.$$

Le curve di (C) secano su $\Omega^2_{C\Gamma}$ una serie lineare g^1_ν dell'ordine $\nu = n(3n + 3m - 9)$ [escludendo i $3n^2$ punti fissi che sono nei punti base di (C)]. In ogni punto doppio del fascio (C) la curva $\Omega^2_{C\Gamma}$ passa con 2 rami, e su ognuno di questi la serie g^1_ν ha la singolarità [0, 3] (**), quindi 2 dei punti doppi della serie lineare g^1_ν cadono

(*) La proposizione su esposta fu enunciata dallo Steiner nella Memoria: *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven* (Giornale di Crelle, t. XLVII); essa è stata dimostrata recentemente dal sig. Berzolari nella Nota: *Sulle curve piane che in due dati fasci hanno un semplice o un doppio contatto oppure si osculano* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, t. XXXI, 1896); più generalmente il sig. Segre nella Nota: *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche* (Ibid.) determinò il numero dei contatti tripunti di curve di due fasci dotati di punti base multipli ordinari, e diede anzi un metodo per calcolare tal numero per due fasci posti su una superficie algebrica qualunque. Però nel caso in cui nel piano si abbiano i fasci (C) e (Γ) *qualunque*, purchè soddisfacenti alle condizioni poste in principio di questo n°, servono le formole (2) ed (1) da noi date in questo n° e nel n° 46, per la determinazione del numero dei contatti tripunti.

(**) Perchè la curva del fascio (C) passante ivi, è tangente ad entrambi i rami di $\Omega^2_{C\Gamma}$, e pel teorema di de Jonquières-Brill (n° 38) ogni suo ramo ha ivi 3 intersezioni con $\Omega^2_{C\Gamma}$.

su ciascuno di tali rami (n° 38). In complesso quindi $12(n-1)^2$ punti doppi della serie g_ν^1 cadono in punti doppi del fascio (C). Inoltre in ognuno dei $\rho = 3(m^2 + 2mn - 2n - 3m + 2)$ punti in cui una curva del fascio (C) è tangente ad infinite curve della rete, la curva $\Omega^2_{C\Gamma}$ è tangente a tal curva di (C) (n° 38), quindi un punto doppio della serie g_ν^1 cade ivi.

Restano $q = 2(\nu + \pi - 1) - 12(n-1)^2 - \rho$ punti doppi della serie g_ν^1, nei quali evidentemente (n° 38) una curva di (C) ha contatto quadripunto con una curva della rete $[\Gamma]$. Facendo i calcoli, trovasi:

$$q = 6[3n^2 + m^2 + 6mn - 17n - 9m + 14].$$

Si ha quindi:

Teorema XXVI. — *Dati nel piano un fascio (C) ed una rete $[\Gamma]$ di curve degli ordini n ed m e generali, esistono, in generale, $6[3n^2 + m^2 + 6mn - 17n - 9m + 14]$ punti ove una curva del fascio (C) ha contatto quadripunto con una curva della rete* (*).

Per $m = 1$ si ha il numero dei *punti d'ondulazione* delle curve d'un fascio generale d'ordine n. Esso è $6(n-3)(3n-2)$.

Per $n = 1$ si ha il

Corollario. — *La classe dell'inviluppo delle rette tangenti alle curve di una rete generale d'ordine m in punti d'ondulazione è* $6m(m-3)$.

Palermo, giugno 1896.

Michele De Franchis.

(*) Per ricavare questo teorema potevamo servirci del metodo adoperato nei n^i 46 e 47, ottenendo il vantaggio di avere formule valevoli per fasci e reti qualunque, di evitare l'introduzione del genere di $\Omega^2_{C\Gamma}$ e di ottenere incidentalmente il numero dei punti ove le curve d'un fascio hanno contatto tripunto con infinite curve d'un sistema lineare ∞^3. Non abbiamo seguito tal metodo, perchè in questo caso richiede ragionamenti lunghi e calcoli laboriosi.

SULLA RISOLUZIONE DELLA CONGRUENZA

$$x^{2^k} \equiv b \pmod{p^\lambda}.$$

Nota del Dr. **Nicola Amici**, in Montecassino.

Adunanza del 28 giugno 1896.

Suppongo b primo con p, poichè quando fosse

$$b = p^s b_1$$

e b_1 primo con p, se

$$s \equiv 0 \pmod{2^k}$$

la congruenza non è impossibile, altrimenti è impossibile; e nel primo caso la risoluzione della congruenza data si può ricondurre alla risoluzione dell'altra

$$x^{2^k} \equiv b_1 \pmod{p^{\lambda_1}}$$

dove b_1 è primo con p e $\lambda_1 < \lambda$.

Ciò premesso dimostro il seguente teorema (*): Date le due

(*) La dimostrazione di questo teorema nel caso di $m = 2$ è stata data dal prof. Tonelli: Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Classe delle scienze fisiche e matematiche, etc., vol. I, 1° semestre, fasc. V.

congruenze

$$(1) \qquad x^m \equiv b \pmod{p}$$

$$(2) \qquad x^m \equiv b \pmod{p^\lambda}$$

dico che se si suppone determinata una radice della (1) si potrà, purchè m non sia multiplo di p, determinare subito una radice della (2).

Infatti sia α una radice della (1) si avrà

$$\alpha^m \equiv b \pmod{p},$$

dalla quale si ha

$$(3) \qquad \alpha^{p^{\lambda-1}m} \equiv b^{p^{\lambda-1}} \pmod{p^\lambda}.$$

Ora se determiniamo y in modo che si abbia

$$(4) \qquad y\varphi(p^\lambda) \equiv p^\lambda - 1 \pmod{m}$$

(il che può sempre farsi, avendo supposto m primo con p) e indichiamo con β una radice della (4) si avrà

$$\beta\varphi(p^\lambda) - p^{\lambda-1} + 1 \equiv 0 \pmod{m}$$

cioè

$$\beta\varphi(p^\lambda) - p^{\lambda-1} + 1 = mq;$$

se moltiplichiamo la (3) per b^{mq} avremo

$$(\alpha^{p^{\lambda-1}} b^q)^m \equiv b^{p^{\lambda-1}} b^{1+\beta\varphi(p^\lambda)-p^{\lambda-1}} \pmod{p^\lambda}$$

cioè

$$(\alpha^{p^{\lambda-1}} b^q)^m \equiv b^{\beta\varphi(p^\lambda)+1} \equiv b \pmod{p^\lambda}$$

dunque $\alpha^{p^{\lambda-1}} b^q$ è una radice della (2), la quale si ottiene elevando

la radice della (1) a $p^{\lambda-1}$ e moltiplicando per b^q dove

$$q = \frac{\beta\,\varphi(p^\lambda) - p^{\lambda-1} + 1}{m}.$$

Perchè sia possibile la (4) è necessario che m non sia multiplo di p; quindi in questo caso, come abbiamo accennato, il teorema non si verifica; ma si può vedere che quest'eccezione dovea necessariamente presentarsi, poichè se m è multiplo di p non è la stessa la condizione richiesta per la possibilità della (1), che della (2). Così date le due congruenze

$$x^p \equiv b \pmod{p}$$

e

$$x^p \equiv b \pmod{p^\lambda},$$

la prima si riduce a

$$x \equiv b \pmod{p}$$

che è così risoluta; per l'altra invece si richiede che si abbia

$$b^{p^{\lambda-2}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^\lambda}.$$

Questo teorema si potrebbe applicare alla risoluzione della congruenza

$$x^m \equiv b \pmod{2^\lambda}$$

quando m è dispari; ma in questo caso è più facile procedere nel modo seguente. Qualunque sia b purchè dispari, si ha

$$b^{2^{\lambda-2}} \equiv 1 \pmod{2^\lambda}.$$

Determiniamo y in modo che si abbia

$$2^{\lambda-2} y \equiv -1 \pmod{m}$$

esiste sempre uno ed un solo valore di y che soddisfa la precedente, sia α questo valore; avremo

$$b^{2^{\lambda-2}\alpha} \equiv 1 \pmod{2^\lambda}$$

e quindi

$$b^{2^{\lambda-2}\alpha+1} \equiv b \pmod{2^\lambda};$$

ma poichè

$$2^{\lambda-2}\alpha \equiv -1 \pmod{m}$$

sarà

$$2^{\lambda-2}\alpha+1 = qm$$

ed allora

$$(b^q)^m \equiv b \pmod{2^\lambda}.$$

Dunque b^q è la radice richiesta.

Dopo ciò il nostro problema è ridotto a risolvere la congruenza

$$x^{2^k} \equiv b \pmod{p}.$$

Essendo p un numero primo dispari si può scrivere

$$p = 2^s h + 1$$

dove h è dispari; possono darsi tre casi, cioè

$$k = s; \quad k > s; \quad k < s.$$

Cominciamo dal primo caso, sia cioè da risolvere la congruenza,

$$x^{2^s} \equiv b \pmod{2^s h + 1}$$

perchè questa sia possibile si deve avere

$$b^h \equiv 1 \pmod{p}.$$

Infatti ne sia α una radice, si avrà

$$\alpha^{2^s} \equiv b \pmod{p}$$

ma si ha sempre

$$\alpha^{2^s h} \equiv 1 \pmod{p}$$

quindi

$$b^h \equiv 1 \pmod{p}$$

dunque è condizione necessaria ed è anche condizione sufficiente, perchè ammessa questa condizione si possono determinare le radici della proposta.

Infatti essendo h dispari la

$$hy \equiv -1 \pmod{2^s}$$

è possibile, ne sia α la radice; si avrà

$$b^{h\alpha} \equiv 1 \pmod{p}$$

e quindi

$$b^{h\alpha+1} \equiv b \pmod{p}$$

ma

$$h\alpha + 1 = 2^s q$$

perciò

$$(b^q)^{2^s} \equiv b \pmod{p}$$

dunque

$$x \equiv \pm b^q \pmod{p}$$

sono due radici della congruenza proposta. Si poteva procedere anche

così; porre

(1) $$x_1^2 \equiv x_2 \pmod p$$

(2) $$x_2^2 \equiv x_3 \pmod p$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$(s-1)$ $$x_{s-1}^2 \equiv x_s \pmod p$$

(s) $$x_s^2 \equiv b \pmod p$$

da queste si avrebbe

$$x_1^4 \equiv x_2^2 \pmod p$$

$$x_1^4 \equiv x_3 \pmod p$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1^{2^{s-2}} \equiv x_{s-1} \pmod p$$

$$x_1^{2^{s-1}} \equiv x_s \pmod p$$

e quindi

$$x_1^{2^s} \equiv x_s^2 \pmod p$$

$$x_1^{2^s} \equiv b \pmod p.$$

Poichè abbiamo trovato che $\pm b^{2^{s-1}q}$ è una radice della congruenza (s) sostituiamo nella $(s-1)$ in luogo di x_s una volta $b^{2^{s-1}q}$ e un'altra volta $-b^{2^{s-1}q}$. Supponiamo $s > 1$ poichè se fosse $s = 1$ le radici sarebbero già determinate ed espresse da

$$x \equiv \pm b^q \pmod p.$$

Inoltre osserviamo che, date le due congruenze

(1) $$x^2 \equiv a \pmod p$$

(2) $$y^2 \equiv -a \pmod p$$

e se $\pm\beta$ sono radici della (1) si ha

$$\beta^2 \equiv a \pmod p$$

inoltre

$$a \equiv a \pmod p.$$

Se con g s'indica un numero non residuo quadratico rispetto a p

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$$

$$g^{\frac{p-1}{2}} a \equiv -a \pmod p$$

$$g^{\frac{p-1}{2}} \beta^2 \equiv -a \pmod p$$

perciò

$$y^2 \equiv g^{\frac{p-1}{2}} \beta^2 \pmod p.$$

Ed essendo $s > 1$, le radici di quest'ultima sono $\pm g^{\frac{p-1}{4}} \beta$.

Ritornando al caso nostro per la prima sostituzione si avranno le radici

$$x_{s-1} \equiv \pm b^{2^{s-2}q}$$

per la seconda sostituzione si avranno altre due radici

$$x_{s-1} \equiv \pm b^{2^{s-2}q} g^{2^{s-2}k}.$$

Le quattro radici si possono scrivere in complesso così:

$$x_{s-1} \equiv \pm b^{2^{s-2}q} g^{2^{s-2}k\varepsilon_1} \pmod p$$

quando si convenga che ε_1 possa assumere i valori 0 ed 1. Sostituendo le due prime nella $(s-2)$ si ha

$$x_{s-2}^2 \equiv b^{2^{s-2}q} g^{2^{s-2}k\varepsilon_1} \pmod p$$

alle quali corrispondono le quattro radici

$$x_{s-2} \equiv \pm b^{2^{s-3}q} g^{2^{s-3}h\varepsilon_1}.$$

Sostituendo le altre due si ha

$$x_{s-2} \equiv \pm g^{2^{s-2}h} b^{2^{s-3}q} g^{2^{s-3}h\varepsilon_1}$$

le otto radici si possono scrivere in complesso così

$$x_{s-2} \equiv \pm b^{2^{s-3}q} g^{2^{s-3}h(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)}$$

quando si convenga che ε_2 possa assumere i valori 0 ed 1. Con l'induzione matematica si dimostra che la formola è vera in generale. Supponiamo infatti che siasi giunto ad avere per $r < s$

$$\text{(I)} \qquad x_{s-(r-1)} \equiv \pm b^{2^{s-r}q} g^{2^{s-r}h(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2^2\varepsilon_3+\ldots+2^{r-2}\varepsilon_{r-1})} \pmod{p}.$$

Sostituendo una delle prime radici nella $(s-r)$ congruenza si avrà

$$x_{s-r}^2 \equiv b^{2^{s-r}q} g^{2^{s-r}h(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2^2\varepsilon_3+\ldots+2^{r-2}\varepsilon_{r-1})} \pmod{p}.$$

Le radici corrispondenti a ciascuna delle precedenti saranno:

$$x_{s-r} \equiv \pm b^{2^{s-r-1}q} g^{2^{s-r-1}h(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2^2\varepsilon_3+\ldots+2^{r-2}\varepsilon_{r-1})} \pmod{p}.$$

Se invece si sostituisce ciascuna delle altre si avrà:

$$x_{s-r}^2 \equiv - b^{2^{s-r}q} g^{2^{s-r}h(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2^2\varepsilon_3+\ldots+2^{r-2}\varepsilon_{r-1})} \pmod{p}$$

e noi sappiamo che le radici corrispondenti a ciascuna di queste sono date dalla

$$x_{s-r} \equiv \pm b^{2^{s-r-1}q} g^{2^{s-2}h} g^{2^{s-r-1}h(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\ldots+2^{r-2}\varepsilon_{r-1})} \pmod{p};$$

convenendo che ε_r possa assumere i valori 0 ed 1. Il complesso

delle radici è dato dalla

$$x_{s-r} \equiv \pm\, b^{2^{s-r-1}q}\, g^{2^{s-r-1}h(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\dots+2^{r-2}\varepsilon_{r-1}+2^{r-1}\varepsilon_r)} \pmod{p}.$$

Dunque la formola è vera in generale.

Ora nella (I) facciamo $s=r$ ed avremo

$$x_1 \equiv \pm\, b^q\, g^{h(\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\dots+2^{s-2}\varepsilon_{s-1})} \pmod{p}$$

che dà tutte le radici della congruenza proposta.

Dimostriamo che realmente queste sono tutte le radici; per averle dobbiamo fare

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{s-1} = 0$$

ed avremo una radice

$$\varepsilon_1 = 1; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_{s-1} = 0$$

$$\varepsilon_2 = 1; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_{s-1} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varepsilon_{s-1} = 1; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{s-2} = 0$$

ed avremo così $s-1$ radici

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1; \quad \text{e} \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \dots = \varepsilon_{s-1} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

e finalmente

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_{s-1} = 1$$

avremo così in tutto

$$1 + (s-1) + \frac{(s-1)(s-2)}{2} + \dots + (s-1) + 1 = (1+1)^{s-1} = 2^{s-1}.$$

Ma siccome ciascuna radice va presa col segno $\pm$, quindi il

numero delle radici è 2^s. E poichè il modulo della congruenza proposta è primo, essa non può ammettere un numero di radici maggiore del suo grado; nel caso nostro essendo il grado 2^s, se dimostriamo, che le radici da noi ottenute sono tutte diverse fra loro, resta pure dimostrato che le radici trovate sono tutte e sole quelle che soddisfano la congruenza proposta. Osserviamo prima però che g deve appartenere ad un esponente della forma $2^s . b_1$, e b_1 deve essere un divisore di b; poichè se fosse

$$g^{2^r b_1} \equiv 1 \pmod p$$

ed $r < s$ posto $s - r = t$; $t \geqq 1$ elevando alla potenza $2^{t-1}b_2$; $b_2 = \dfrac{b}{b_1}$ si avrebbe

$$g^{2^{s-1}b} \equiv 1 \pmod p$$

ciò che è impossibile, perchè g è un non residuo quadratico. Ora se g appartiene a $2^s b_1$ non si potrà avere

$$g^m \equiv 1 \pmod p$$

se m non è multiplo di $2^s b_1$.

Osserviamo inoltre che nella formola

$$x \equiv \pm b^q g^{k(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2^2\varepsilon_3 + \dots + 2^{s-2}\varepsilon_{s-1})} \pmod p$$

il massimo esponente di g si avrà quando

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_{s-1} = 1$$

allora si ha

$$x \equiv \pm b^q g^{k(2^{s-1}-1)}.$$

Se

$$x \equiv \pm b^q g^{ka} \quad \text{e} \quad x \equiv \pm b^q g^{kc} \pmod p$$

sono due coppie di radici, a e c non potranno assumere valori diversi da

$$0,\ 1,\ 2,\ \dots\ 2^{s-1}-1.$$

Ciò posto dimostriamo che le nostre radici sono tutte distinte; se così non fosse si dovrebbe avere

$$b^q g^{ba} \equiv \pm b^q g^{bc} \pmod{p}. \tag{I}$$

Supponiamo a e c diverse fra loro ed a maggiore di c, poichè se fosse $a=c$ la radice $b^q g^{ba}$ sarebbe la stessa che $b^q g^{bc}$, non può aversi

$$b^q g^{ba} \equiv \mp b^q g^{bc} \pmod{p}$$

perchè si avrebbe

$$2\, b^q \equiv 0 \pmod{p}$$

ciò che è impossibile. Dalla (I) si ha

$$g^{ba} \equiv g^{bc} \pmod{p}$$

e quindi

$$g^{b(a-c)} \equiv 1 \pmod{p}, \quad \text{o} \quad g^{2b(a-c)} \equiv 1 \pmod{p}$$

ciò che pure è impossibile poichè dovrebb'essere $2\,b(a-c)$ un multiplo di $2^s b_1$, ma b per supposizione è dispari quindi $2(a-c)$ dovrebb'essere divisibile per 2^s, ma $2(a-c)$ è sempre minore di 2^s, perchè il caso più sfavorevole si avrà quando $c=0$ ed $a=2^{s-1}-1$ ed in questo caso $2(a-c)=2^s-2$.

Dunque tutte le radici sono fra loro distinte e la congruenza proposta è completamente risoluta quando $k=s$.

Passiamo ora al secondo caso; supponiamo cioè $k>s$. Sia

$$x^{2^k} \equiv b \pmod{p}; \qquad p = 2^{s b_1 + 1}. \tag{1}$$

Perchè sia possibile la (1) è necessario si abbia

$$b^{h} \equiv 1 \pmod{p};$$

questa è anche condizione sufficiente; infatti poniamo

$$by \equiv -1 \pmod{2^{h}}$$

ne sia α una radice, si avrà

$$b^{h\alpha} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$b^{h\alpha+1} \equiv b \pmod{p};$$

quindi

$$(b^{q})^{2^{h}} \equiv b \pmod{p}; \qquad x \equiv \pm b^{q}$$

così restano determinate due radice della (1), e

$$b^{h} \equiv 1 \pmod{p}$$

è condizione sufficiente. Dalla teoria degl'indici sappiamo che la ([illegible] ammette 2^{s} radici, vediamo di determinarle. Dico che essendo

$$x \equiv \pm b^{q_1} \pmod{p}$$

e g un non residuo quadratico rispetto a p, anche

$$x \equiv b^{q_1} g^{hs} \pmod{p}$$

è una radice della proposta

$$(\pm b^{q})^{2^{h}} \equiv b \pmod{p}$$

inoltre si ha

$$g^{e'h} \equiv 1 \pmod{p}$$

perciò

$$g^{2^s au} \equiv 1 \pmod p$$

ed elevando alla potenza 2^{k-s} si ottiene

$$g^{2^k au} \equiv 1 \pmod p$$

moltiplicando questa per la (2) si ha

$$g^{2^k au} b^{2^k t} \equiv b \pmod p;$$

perciò $\pm g^{au} b^t$ sono due radici della (1); ed allora si deduce che

$$(3) \qquad x \equiv \pm b^t g^{u(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2^2\varepsilon_3 + \ldots + 2^{s-2}\varepsilon_{s-1})}$$

dà tutte le radici della (1); poichè a può essere qualunque e perciò può assumere uno qualunque dei valori

$$0, 1, 2, \ldots 2^{s-1} - 1$$

e nella (3) dando alle ε i valori 0 ed 1 in tutte le combinazioni possibili, otteniamo 2^s radici, le quali sono tutte incongrue fra loro e ciò risulta dalla dimostrazione data nel caso precedente.

Veniamo ora al 3° caso in cui $k < s$; in questo caso possiamo applicare il metodo per la risoluzione delle congruenze di secondo grado (*). Sia

$$x^{2^k} \equiv b \pmod p, \quad e \quad p = 2^s h + 1$$

perchè questa sia possibile è necessario si abbia

$$b^{2^{s-k}h} \equiv 1 \pmod p$$

dalla quale si ha

$$(b^{2^{s-k-1}h} - 1)(b^{2^{s-k-1}h} + 1) \equiv 0 \pmod p.$$

(*) Dato dal prof. Tonelli, luogo citato.

Ora essendo p primo deve dividere uno dei due fattori del primo membro, non può dividerli entrambi perchè dovrebbe dividere la loro differenza, cioè 2 mentre $p > 2$. Quindi si deve avere o

$$b^{2^{s-k-1}b} \equiv 1 \pmod{p}, \qquad \text{o} \qquad b^{2^{s-k-1}b} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Se è verificata la seconda, sia g un non residuo quadratico rispetto a p, si avrà

$$g^{2^{s-1}b} \equiv -1 \pmod{p}$$

se con y_1 s'indica un numero che può assumere il valore 0, od 1, secondo che è verificata la prima o la seconda, in ogni caso si ha

$$g^{2^{s-1}by_1}\, b^{2^{s-k-1}b} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Con l'induzione matematica si dimostra vera la formola

$$g^{2^{s-r+1}b(y_1+2y_2+\dots+2^{r-2}y_{r-1})}\, b^{2^{s-k-r}b} \equiv 1 \pmod{p}$$

dove si deve determinare quando le y devono prendere il valore 0, od 1.

Nella precedente facendo

$$r = s - k$$

si ha

$$g^{2^k b(y_1+2y_2+\dots+2^{s-k-2}y_{s-k-1})}\, b^{b} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Giunti a questo punto possiamo porre

$$by \equiv -1 \pmod{2^k}$$

e determinare l'incognita, di cui il valore sia α, si avrà

$$g^{2^k b\alpha(y_1+2y_2+\dots+2^{s-k-2}y_{s-k-1})}\, b^{b\alpha} \equiv 1 \pmod{p}$$

e quindi

$$g^{2^k b\alpha(y_1+2y_2+\dots+2^{s-k-2}y_{s-k-1})}\, b^{b\alpha+1} \equiv b \pmod{p}$$

$$b\alpha + 1 = 2^{k}_{q}$$

perciò

$$\left(g^{hm(y_1+2y_2+\dots+2^{k-2}y_{k-1})} b^{\mu}\right)^{2^k} \equiv b \pmod p$$

$$x \equiv \pm g^{hm(y_1+2y_2+\dots+2^{k-2}y_{k-1})} b^{\mu} \pmod p.$$

Sono così determinate due radici della congruenza proposta; indichiamole con $\pm \beta$. Allora osserviamo che invece di risolvere la (1) si potranno risolvere le

$$(1) \qquad x_1^2 \equiv x_2 \pmod p$$

$$(2) \qquad x_2^2 \equiv x_3 \pmod p$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(k-1) \qquad x_{k-1}^2 \equiv x_k \pmod p$$

$$(k) \qquad x_k^2 \equiv b \pmod p$$

e poichè

$$\beta^{2^k} \equiv b \pmod p$$

ne segue che $\pm \beta^{2^{k-1}}$ è radice di $x_k^2 \equiv b \pmod p$.

Ragionando come si è fatto nel primo caso si trova che

$$x \equiv \pm \beta\, g^{h(z_1+2z_2+2^2z_3+\dots+2^{k-2}z_{k-1})}$$

dà tutte le radici cercate. Così la congruenza è risoluta anche in quest'ultimo caso.

Montecassino (Caserta), 10 giugno 1896.

NICOLA AMICI.

SULL'ORDINE DELLA VARIETÀ

GENERATA DA PIÙ SISTEMI LINEARI OMOGRAFICI.

Nota di **Mario Pieri**, in Torino.

Adunanza dell'8 novembre 1896.

La quistione di cui tratta il presente articolo è stata pienamente risolta da un recente lavoro algebrico del sig. K. Th. Vahlen (*): ma la sua particolare importanza agli officii della moderna Geometria projettiva ne fa desiderare un'esposizione più diretta e conforme ai mezzi proprî di questa scienza; l'uso dei quali non è per togliere ad essa quistione in semplicità e brevità quel che le dona in evidenza.

« *Essendo dati, nell'ambiente projettivo n-dimensionale* S_n; *k sistemi* ***lineari*** $\Sigma_{(1)}$, $\Sigma_{(2)}$, ... $\Sigma_{(k)}$ *di varietà algebriche da* $n - 1$ ***dimensioni****, tutti della medesima* ***specie*** *o* ***grado d'infinità*** i *e riferiti* ***projettivamente*** *fra loro; e dati anche gli* ***ordini***

(*) « *Ueber den Grad der Eliminationsresultante eines Gleichungsystems* », Crelle's Journal, Bd. 113 (1894).—Ed anche senza di ciò, gli schiarimenti offerti sovr'essa dai molti casi particolari noti da tempo. non lasciavano, si può dire, alcun dubbio circa la sua general soluzione. *Vedi* segnatamente Cremona « *Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie*, cap. VIII (nella traduzione tedesca di Max. Curtze, Berlino 1870).

$n_1, n_2, \ldots n_k$ *di quelle varietà, si vuol trovar l'ordine del luogo geometrico d'un punto, nel quale concorrano k varietà corrispondenti dei k sistemi* ».—Designeremo quest'ordine con $F[n_1, n_2, \ldots n_k; i]$.

Anzitutto si osservi che questo luogo, come varietà subordinata in S_n, esiste soltanto se:

$$0 \leqq n + i - k < n, \quad \text{quindi} \quad i < k;$$

e possiede allora $n + i - k$ dimensioni: laddove se $i = k$ *ogni* punto di S_n comparisce *una* ed *una sola* volta come punto del luogo, sicchè questo può aversi in tal caso come varietà *del* 1° *ordine* ad n dimensioni:

$$(1) \qquad F[n_1, n_2, \ldots, n_k; k] = 1.$$

Di poi, per la natura stessa del problema, k è un numero intero *maggiore dell'unità*, i un numero intero *positivo* o *nullo*. Ma per $k = 2$, $i = 1$ si ha immediatamente (Principio di Chasles):

$$(2) \qquad F[n_1, n_2; 1] = n_1 + n_2;$$

e per $k \geqq 2$, $i = 0$ [Teorema di Bezout (*)]:

$$(3) \qquad F[n_1, n_2, \ldots, n_k; 0] = n_1 n_2 n_3 \ldots n_k.$$

Le (1), (2) e (3) rispondono al quesito, nei valori estremi di k o di i. Suppongasi dunque $k > 2$, $i < k$; e si prenda a piacere in S_n uno spazio lineare S_{k-i} di $n - (n + i - k) = k - i$ dimensioni. Se ora si chiamino omologhi in questo due punti A ed A', sempre che A giaccia in una varietà del sistema $\Sigma_{(1)}$ ed A' in ciascuna delle $k - 1$ varietà che corrispondono projettivamente a quella negli altri sistemi, il numero delle coincidenze fra punti omologhi

(*) Dell'estensione di questo teorema agli spazî superiori in veste geometrica tratta una mia Nota: « *Sopra un teorema di Geometria ad n dimensioni* » nel Giornale di Matematiche, vol. XXVI, pp. 251-254.

sarà precisamente l'*ordine* che si desidera. E guardando ai *caratteri* o *gradi* della dipendenza algebrica così stabilita fra i punti dell'S_{k-1} —che è quanto dir della *serie* ∞^{k-i} generata dalle coppie (A, A')—la somma dei quali sappiamo essere appunto il numero delle *coincidenze* o punti *doppi* della serie (*); si scorge dapprima che il numero delle coppie (A, A'), per cui A è dato a piacere, viene espresso dal simbolo $F[n_2, n_3, \ldots n_k; i-1]$: atteso che le varietà di $\Sigma_{(1)}$ passanti per A formano un sistema lineare subordinato di specie $i-1$, e i $k-1$ sistemi lineari corrispondenti al medesimo in $\Sigma_{(2)}, \Sigma_{(3)}, \ldots \Sigma_{(k)}$ generano da parte loro una varietà di $n+i-1-(k-1)=n+i-k$ dimensioni e d'ordine $F[n_2, n_3, \ldots n_k; i-1]$, che taglia in altrettanti punti A' lo spazio S_{k-1}. Secondariamente apparisce che il numero delle coppie (A, A'), per cui A stia in una retta data ed A' in un dato iperpiano dell'S_{k-1}, vale $n_1 . F[n_2, n_3, \ldots n_k; i]$: perchè, mentre A percorre tutta la retta, le varietà di $\Sigma_{(1)}$ che passan per A descrivono n_1 volte tutto il sistema $\Sigma_{(1)}$, e le loro corrispondenti in $\Sigma_{(2)}, \Sigma_{(3)}, \ldots \Sigma_{(n)}$ producono n_1 volte la varietà generata da questi $k-1$ sistemi lineari omografici, la quale è per ipotesi d'ordine $F[n_2, n_3, \ldots n_k; i]$ e di $n+i-(k-1)$ dimensioni; sicchè l'omologo di A cade $n_1 . F[n_2, n_3, \ldots n_k; i]$ volte nel dato iperpiano. Infine, tutti gli altri gradi della serie qui considerata son *nulli;* com'è facile a vedere. Dunque, per $k>2$ ed $i<k$ sussisterà la relazione:

$$(4)\quad F[n_1, n_2, \ldots n_k; i] = n_1 F[n_2, n_3 \ldots n_k; i] + F[n_2, n_3, \ldots n_k; i-1].$$

Le condizioni (1), (2), (3) e (4) determinano pienamente la funzione F; poichè se ne cava per via tutta aritmetica:

$$(5)\qquad F[n_1, n_2, \ldots n_k; i] = \binom{n_1, \; n_2, \ldots n_k}{k-i};$$

(*) *Vedi* Caporali: « *Memorie di Geometria* », pag. 329 (Napoli, Pellerano ed. 1888) e Pieri: « *Sul principio di corrispondenza*, etc. ». (Rendiconti de' Lincei, 1887) e « *Formule di coincidenza*, etc. » (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1891).

dove il simbolo $\binom{\alpha_1, \ \alpha_2, \ \dots \ \alpha_l}{m}$, con $l \geqq m > 0$, è posto a rappresentare la somma di tutti i prodotti, in numero di $\binom{l}{m}$, che nascono moltiplicando fra loro m ad m in tutti i modi possibili gli l numeri $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_l$ — ossia la somma delle *combinazioni* ordinarie di classe m formate con questi numeri, considerata ognuna come *prodotto* de' suoi elementi — e per $m = 0$ rappresenta l'*unità*.

Come ognun vede, la relazione (5), dove si metta ordinatamente $i = k$; $i = 1$, $k = 2$; $i = 0$, convertesi nelle precedenti (1), (2), (3). Per $i = 1$, $k > 2$ si ha dalle (4) e (3):

$$F[n_1, n_2, \dots n_k; 1] = n_1 . F[n_2, n_3, \dots n_k; 1] + n_2 n_3 \dots n_k,$$

$$F[n_2, n_3, \dots n_k; 1] = n_2 . F[n_3, n_4, \dots n_k; 1] + n_3 n_4 \dots n_k,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F[n_{k-2}, n_{k-1}, n_k; 1] = n_{k-2} . F[n_{k-1}, n_k; 1] + n_{k-1} n_k;$$

e queste eguaglianze sommate membro a membro, dopo aver moltiplicato la seconda per n_1, la terza per $n_1 n_2, \dots$, l'ultima per $n_1 n_2 \dots n_{k-3}$ con avviso alla (2) dànno subito:

$$F[n_1, n_2, \dots n_k; 1] = \binom{n_1, \ n_2, \ \dots \ n_k}{k - 1}$$

di pieno accordo con (5). Seguitando, potremmo salire man mano ad $i = 2, 3, \dots$ ecc. Ma, per concludere in breve, basta sol riscontrare (argomentando da $i - 1$ ad i) se, una volta ammessa la (5) con un valore particolare $i' - 1$ di i; vale a dire se supposto:

$$F[n_1, n_2, \dots n_k; i' - 1] = \binom{n_1, \ n_2, \ \dots \ n_k}{k - i' + 1},$$

se ne deduca la verità di essa (5) per $i = i'$. E così è nel fatto; poichè dalle eguaglianze:

$$F[n_1, n_2, \dots n_k; i'] = n_1 F[n_2, n_3, \dots n_k; i'] + \binom{n_2, n_3, \dots n_k}{k - i'},$$

$$F[n_2, n_3, \dots n_k; i'] = n_2 F[n_3, n_4, \dots n_k; i'] + \binom{n_3, n_4, \dots n_k}{k - i' - 1},$$

. . . .

$$F[n_{k-i'}, n_{k-i'+1}, \dots n_k; i'] = n_{k-i'} F[n_{k-i'+1}, n_{k-i'+2}, \dots n_k; i'] + \binom{n_{k-i'+1}, n_{k-i'+2}, \dots n_k}{1},$$

desunte da quell'ipotesi e dalla (4), si ricava, atteso anche la (1):

$$F[n_1, n_2, \dots n_k; i'] = \binom{n_2, n_3, \dots n_k}{k - i'} + n_1 \binom{n_3, n_4, \dots n_k}{k - i' - 1} + n_1 n_2 \binom{n_4, n_5, \dots n_k}{k - i' - 2} + \dots + n_1 n_2 \dots n_{k-i'-1} \binom{n_{k-i'+1}, n_{k-i'+2}, \dots n_k}{1} + n_1 n_2 \dots n_{k-i'};$$

e questa non è che la (5) opportunamente sviluppata, e dove sia posto $i = i'$.

Si conclude da ciò che precede:

« Il luogo geometrico dei punti d'un S_n, in ciascuno dei quali si « tagliano k varietà corrispondenti di k sistemi lineari di i^{ma} specie, « composti di varietà da $n - 1$ dimensioni, e riferiti projettivamente fra loro, è una varietà di $n - k + i$ dimensioni (purchè « $0 \leqq n - k + i \leqq n$) d'ordine eguale alla somma dei prodotti al- « gebricamente distinti, che nascono al moltiplicare fra loro i varî « ordini $n_1, n_2, \dots n_k$ di detti sistemi presi a $k - i$ per volta in « tutti i $\binom{k}{i}$ modi possibili; — e d'ordine uguale all'unità se $i = k$ ».

Questo numero è al tutto indipendente dalle dimensioni dello spazio ambiente. Infiniti sono i casi offerti già dallo spazio ordinario ($n = 3$): cioè per ogni dato valore di i (fatta astrazione da $i = k$) *tre* luoghi, corrispondenti a $k = i + 1$, $k = i + 2$, $k = i + 3$, che sono rispettivamente una superficie, una linea, un gruppo di punti (*).

(*) Cfr. Cremona, al luogo citato.

Nè meno importante è il caso di $n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_k = 1$, che si presenta quando i k sistemi sono *forme fondamentali d'iperpiani* collineari: il luogo dei punti comuni a k iperpiani omologhi è allora *una varietà di $n - k + i$ dimensioni e d'ordine* $\binom{k}{i}$ (*).

Novembre 1896.

MARIO PIERI.

(*) Dei casi $i = n$, $k = n + 1$, $n + 2$, e $i = n - 1$, $k = n$, $n + 1$ tratta il Veronese ai n[i] 46 e 48 della Memoria: « *Projectivische Verhältnissen* etc. » (Math. Annalen, Bd. XIX); nella quale non si contemplano ipotesi più generali.

IL METODO DEL GRASSMANN

NELLA GEOMETRIA PROIETTIVA.

Nota II[a] di C. Burali-Forti, in Torino (*).

Adunanza del 14 febbrajo 1897.

In questa Nota ci proponiamo di studiare le proprietà delle omografie che ad ogni forma P di prima specie fanno corrispondere una forma di prima specie funzione lineare di P e di una forma fissa W pure di prima specie (**). Le omografie proiettive che a queste corrispondono (Nota I, pag. 192) contengono le ordinarie *omologìe* e *prospettività*, e dànno rapidamente i metodi di rappresentazione di cui fa uso la geometria descrittiva, insieme ai teoremi fondamentali dei quali questa continuamente si serve.

Per brevità di scrittura e per esprimere in simboli alcune proposizioni, scriveremo:

F_1, F_2, F_3, rispettivamente, al posto di forma di *prima, seconda, terza* specie;

(*) Vedi la Nota I[a] nel tomo X, pp. 177-195 di questi Rendiconti.

(**) Per il principio di dualità si ottengono in modo analogo le omografie che ad ogni forma di terza specie π fanno corrispondere una forma di terza specie funzione lineare di π e di una forma fissa θ pure di terza specie.

v, v^2, v^3 al posto di *vettore, bivettore, trivettore;* con ω indicheremo il trivettore unità (*).

Per le omografie ricordiamo le definizioni e proprietà seguenti. Sieno U, U', U'' sistemi lineari ad n dimensioni di forme geometriche.

Se σ, λ sono omografie tra gli U e gli U', diciamo che $\sigma = \lambda$ quando qualunque sia la forma P di U si ha che $\sigma P = \lambda P$. Nelle stesse ipotesi poniamo $(\sigma + \lambda) P = \sigma P + \lambda P$ e $\sigma + \lambda$ è un omografia poichè $(\sigma + \lambda)(P + Q) = (\sigma + \lambda) P + (\sigma + \lambda) Q$ e $(\sigma + \lambda)(m P) = m[(\sigma + \lambda) P]$. Se σ è un'omografia tra gli U e gli U' e λ è una omografia tra gli U' e gli U'' poniamo $\lambda\sigma P = \lambda(\sigma P)$ e $\lambda\sigma$ è una omografia tra gli U e gli U''. Se σ è un'omografia tra gli U e gli U poniamo $\sigma^1 = \sigma$ ed essendo n un numero intero e positivo poniamo $\sigma^{n+1} = \sigma^n \sigma$; se σ è invertibile poniamo $\sigma^{-n} = (\sigma^n)^{-1}$ e facilmente si dimostra che le potenze di σ godono delle proprietà delle potenze dei numeri.

§ 5. — *Omografie collineari.*

Diciamo che una corrispondenza lineare σ tra forme di prima specie e forme di prima specie è una *omografia collineare,* quando, esiste una forma di prima specie fissa W tale che qualunque sia la forma di prima specie P si abbia che σP è funzione lineare di P e di W, (cioè $\sigma P \varepsilon \mathrm{q} P + \mathrm{q} W$).

La forma W dicesi « *forma centro* » della omografia σ.

Teorema I. — Se σ è un omografia collineare la cui forma centro è W, allora è determinato un numero s e, almeno, una forma di terza specie α, tali che qualunque sia la forma di prima

(*) Secondo quanto abbiamo detto nella Nota I si ha che:

punto proiettivo $=$ posiz ($F_1 - \iota 0$); retta proiettiva $=$ posiz ($F_1 F_1 - \iota 0$)

piano proiettivo $=$ posiz ($F_3 - \iota 0$)

punto all'infinito $=$ posiz ($v - \iota 0$); retta all'infinito $=$ posiz ($v^2 - \iota 0$)

piano all'infinito $=$ posiz ($v^3 - \iota 0$) $=$ posiz ω.

specie P si abbia

(1) $$\sigma P = s P + (P \alpha) W.$$

Dim. — Se P, P' sono F_1 allora, per ipotesi, sono determinati i numeri s, s', s'' l, l', l'' tali che

$$\sigma P = s P + l W, \qquad \sigma P' = s' P' + l' W,$$

$$\sigma(P + P') = s''(P + P') + l'' W.$$

Ma σ, per ipotesi, è un'omografia e quindi $\sigma(P+P') = \sigma P + \sigma P''$; in conseguenza

$$s P + s' P' + (l + l') W = s''(P + P') + l'' W.$$

Se moltiplichiamo i due membri per una forma di terza specie β che contenga P' e W (cioè tale che $P'\beta = W\beta = 0$) si ha $s P \beta = s'' P \beta$, cioè $s = s''$. In modo analogo si dimostra che $s' = s''$.

Da ciò si deduce che: « esiste un sol numero s tale che $\sigma P = s P + l W$ ».

Sieno ora P_r, $(r = 1, 2, 3, 4)$ quattro F_1 indipendenti. Sono determinati i numeri l_r tali che

$$\sigma P_r = s P + l_r W$$

ed è determinata la forma α di terza specie tale che

$$P_r \alpha = l_r \text{ (*)}$$

essendo $P_1 P_2 P_3 P_4$ il tetraedro unità. Se P è una F_1 qualunque sono determinati i numeri x_r tali che

$$P = x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + x_4 P_4.$$

(*) La α è la forma che rispetto alle P_r ha i numeri l_r per coordinate, cioè si ha che

$$\alpha = l_1 P_2 P_3 P_4 + l_2 P_3 P_4 P_1 + l_3 P_4 P_1 P_2 + l_4 P_1 P_2 P_3.$$

Essendo $P\alpha = l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + l_4 x_4$ si ha che

$$\sigma P = s P + (P\alpha) W$$

che dimostra il teorema.

Con la notazione

$$\sigma = [s,\ W,\ \alpha] \tag{2}$$

intendiamo esprimere che σ è l'omografia collineare tale che per qualunque forma di prima specie P sussiste la formula (1). Il teorema I dimostra che ogni omografia collineare può assumere la forma (2).

La forma di terza specie α che comparisce nella (2) dicesi « forma base » della omografia σ.

Teorema II. — L'omografia $[s,\ W,\ \alpha]$ è l'identità, (cioè $[s,\ W,\ \alpha] = 1$) solo quando $s = 1$ e, o la forma centro (W) o la forma base (α) è nulla. In simboli

$$[s,\ W,\ \alpha] = 1 . = .\because . s = 1 : W = 0 . \smile . \alpha = 0 .$$

Dim. Se $s = 1$ e, $W = 0$ o $\alpha = 0$, allora dalla (1) si ha, qualunque sia P, che $\sigma P = P$, cioè $\sigma = 1$.

Viceversa. Se $\sigma = 1$, allora dalla (1) si ha che $(1 - s)P = (P\alpha)W$, da cui, moltiplicando per P si deduce che $(P\alpha)(PW) = 0$ qualunque sia P, il che avviene solo quando o $W = 0$ o $\alpha = 0$; ma se $W = 0$ o $\alpha = 0$ allora $(1 - s)P = 0$, cioè $s = 1$.

Teorema III. — Se le omografie collineari $\sigma = [s,\ W,\ \alpha]$, $\sigma_1 = [s_1,\ W_1,\ \alpha_1]$ non sono identità, allora $\sigma = \sigma_1$ solo quando $s = s_1$ ed esiste un numero reale e non nullo m tale che $W_1 = mW$ e $\alpha = m\alpha_1$.

$$\sigma -\!= 1 . \sigma_1 -\!= 1 . \supset :: \sigma = \sigma_1 . = .\because . s = s_1 : m \,\varepsilon\, q - \iota 0 . W_1 = mW .$$

$$\alpha = m\alpha_1 . -\!=_m \Lambda .$$

Dim.—Se $s = s_1$ ed esiste il numero m tale che $W_1 = m W$, $\alpha = m \alpha_1$, allora dalla (1) si ha, qualunque sia P, che $\sigma P = \sigma_1 P$, cioè $\sigma = \sigma_1$.

Viceversa. Se $\sigma = \sigma_1$ allora dalla (1) si ha

$$(a) \qquad s P + (P \alpha) W = s_1 P + (P \alpha_1) W_1$$

ovvero, moltiplicando per P

$$(b) \qquad (P \alpha)(P W) = (P \alpha_1)(P W_1).$$

Questa, essendo W e W_1 forme non nulle (Teor. II) dimostra che la retta $P W$ passa sempre per il punto W_1, cioè dimostra che: « esiste un numero m tale che $W_1 = m W$ ». Ponendo nella (b) $m W$ al posto di W_1 si ha che $P \alpha = m (P \alpha_1)$ cioè $\alpha = m \alpha_1$.

Sostituendo nella (a) si ha che $s = s_1$.

Vedremo nel § seguente le applicazioni di questo teorema. Per ora ci limitiamo ad indicare alcune proprietà delle omografie collineari che facilmente si deducono dalla notazione (2).

Poniamo

$$(3) \qquad [W, \alpha] = [1, W, \alpha]$$

e dalla (1) si ottengono facilmente le formule

$$(4) \quad [s, W, \alpha] = [W, \alpha] + s - 1; \quad [s, W, \alpha] = s\left[W, \frac{\alpha}{s}\right] = s\left[\frac{W}{s}, \alpha\right].$$

La prima delle (4) vale qualunque sia s e riduce ogni omografia collineare generale alla somma di un'omografia $[1, W, \alpha]$ con un numero. La seconda delle (4) vale solo per s diverso da zero, e riduce l'omografia collineare generale al prodotto di un'omografia $[1, W, \alpha]$ per un numero. Eccettuate le omografie $[0, W, \alpha]$, che sono del resto prive di interesse, tutte le altre omografie collineari si possono ridurre alla forma (3).

Se m, n sono numeri tali che $m + n$ è diverso da zero, allora

dalla (1) si ha facilmente che

(5) $$\frac{m[W, \alpha] + n[W, \alpha_1]}{m+n} = \left[W, \frac{m\alpha + n\alpha_1}{m+n}\right]$$

(5)' $$\frac{m[W, \alpha] + n[W_1, \alpha]}{m+n} = \left[\frac{mW + nW_1}{m+n}, \alpha\right]$$

che dànno proprietà baricentriche delle omografie $[W, \alpha]$ e quindi anche delle omografie generali $[s, W, \alpha]$ per s diverso da zero.

§ 6. — *Collineazioni.*

Chiamiamo « Collineazione », ogni omografia collineare della forma $[W, \alpha]$ [Vedi § 5, (3)].

In ciò che segue resterà sempre sottinteso che

$$\sigma = [W, \alpha]$$

ove W è una forma di prima specie e α è una forma di terza specie.

I. $P \varepsilon F_1 . \supset . \sigma P = P + (P\alpha) W$

II. $P \varepsilon F_1 . \supset . \sigma P = (W\alpha + 1)P + (PW)\alpha$.

La I è conseguenza immediata della (1) del § 5. La II si deduce dalla I osservando che $(P\alpha)W = (PW)\alpha + (W\alpha)P$. Per la I si ottiene la posizione di σP con costruzioni baricentriche, dal punto P e dal punto W; per la II si ottiene la posizione di σP con costruzioni baricentriche, dal punto P e dal punto di incontro della retta WP con la posizione della forma base di σ.

Si dimostrano facilmente, valendosi delle prop. I, II, le proposizioni seguenti

III. $P \varepsilon F_1 . \supset .\because. P(\sigma P) = 0 . = : PW = 0 . \smile . P\alpha = 0$

IV. $P \varepsilon F_1 . \sigma - = 1 . P(\sigma P) - = 0 . \supset . \text{rapp}[W, (PW)\alpha, P, \sigma P] = W\alpha + 1$.

V. $P_1, P_2, P_3, P_4 \varepsilon F_1 . P_1P_2P_3P_4 - = 0 . \supset . \frac{(\sigma P_1)(\sigma P_2)(\sigma P_3)(\sigma P_4)}{P_1P_2P_3P_4} =$
$= W\alpha + 1$.

La III dimostra che P è, rispetto a σ, unita, solo quando giace sulla forma centro o sulla forma base di σ. La IV dice che è costante (ed eguale a $W\alpha + 1$) il birapporto formato col punto W, col punto di incontro della retta PW colla forma base, col punto P e col corrispondente di P.

Indichiamo con ω il trivettore unità, cioè il trivettore tale che, essendo O un punto qualunque, il tetraedro $O\omega$ è destroso e il suo volume è 1.

VI. $F_1 \frown \overline{X\varepsilon}\{\sigma X \varepsilon v\} = F_1 \frown \overline{X\varepsilon}\{X[\omega + (W\omega)\alpha] = 0\}$.

VII. $P \varepsilon F_1 . \supset_P . \sigma P \varepsilon v := . \omega + (W\omega)\alpha = 0$

VIII. $[\omega + (W\omega)\alpha] \varepsilon v^3 . = : W \varepsilon v . \smile . \alpha \varepsilon v^3$.

La VI esprime che: « Una forma di prima specie X ha, rispetto a σ, per corrispondente un vettore, solo quando X giace sulla forma di terza specie $\omega + (W\omega)\alpha$ ». Ciò si deduce subito dalla I osservando che $(\sigma P)\omega = P\omega + (P\alpha)(W\omega) = P\omega + P[(W\omega)\alpha] = P[\omega + (W\omega)\alpha]$ e che $(\sigma P)\omega = 0$ equivale alla condizione « σP è un vettore ». La forma $\omega + (W\omega)\alpha$ dicesi « forma limite » della collineazione σ.

La VII esprime che ogni F_1 ha per corrispondente un vettore solo quando è nulla la forma limite di σ. La VIII esprime che la forma limite di σ è un trivettore solo quando la forma centro è un vettore, o la forma base è un trivettore, (infatti $[\omega + (W\omega)\alpha]\omega = (W\omega)(\alpha\omega)$).

Quando σ non è l'identità noi poniamo

(1) $\quad$ centro σ = posiz W, $\quad$ base σ = posiz α

e il teorema III del § 5 prova che il centro di σ è un punto funzione di σ e che base σ è un piano funzione di σ.

Il numero $W\alpha + 1$ che comparisce nelle prop. II, IV, V, dicesi « birapporto di σ » e lo indichiamo con la notazione rapp σ;

cioè poniamo

$$\text{rapp}\,\sigma = W\alpha + 1. \tag{2}$$

Il teorema III del § 5 dimostra che rapp σ è funzione di σ.

Chiamiamo « limite di σ » e lo indichiamo con lim σ il luogo dei punti che sono posizioni delle F_1 avente per corrispondenti dei vettori. Se la forma limite di σ non è nulla allora dalla prop. VI si ha che

$$\lim \sigma = \text{posiz}\,[\omega + (W\omega)\alpha];$$

se la forma limite di σ è nulla, allora (prop. VII) lim σ è l'insieme di tutti i punti. Il teorema III del § 5 dimostra che lim σ è funzione di σ.

Se la forma limite di σ non è un trivettore allora anche la forma base di σ non è un trivettore e si ha che lim σ è un piano proiettivo parallelo al piano base σ, perchè il triangolo $\omega + (W\omega)\alpha$ si ottiene dal triangolo $(W\omega)\alpha$ (che ha la medesima posizione di α), mediante una traslazione.

Osservando che per la collineazione $\sigma = [W, \alpha]$ possono variare gli elementi W, α senza che vari σ, risulta l'importanza degli elementi proiettivi centro σ, base σ, rapp σ, lim σ, che sono, in certo modo, degli invarianti della omografia σ.

Se nelle cose precedenti consideriamo, in luogo del sistema generale delle F_1, il sistema (a tre dimensioni) delle F_1, che hanno la posizione in un piano proiettivo π, allora si ottengono le collineazioni nel piano π. In seguito noi supporremo note le proprietà delle collineazioni piane che si ottengono dalle cose precedenti sostituendo alle F_3 le F_2 del piano fisso.

§ 7. — *Omologia.*

Diciamo *Omologia* in luogo di « *Collineazione* a birapporto non nullo », Scrivendo Collin e Omolog al posto di collineazione e omo-

logia, abbiamo

$$\text{Omolog} = \text{Collin} \frown \overline{\sigma\,\varepsilon}\,\{\text{rapp}\,\sigma - = 0\}.$$

I. $\sigma\,\varepsilon\,\text{Omolog}\,.\,\sigma - = \iota\,.\,m\,\varepsilon\,\text{n} - \iota 0\,.\,\supset\,.\,\sigma^m\,\varepsilon\,\text{Omolog} - \iota\iota\,.$

$$\text{centro}\,\sigma^m = \text{centro}\,\sigma\,.\,\text{base}\,\sigma^m = \text{base}\,\sigma\,.\,\text{rapp}\,\sigma^m = (\text{rapp}\,\sigma)^m.$$

Questa prop. esprime che: « se σ è un omologia diversa dall'identità e m è un numero intero non nullo (positivo o negativo), allora σ^m è pure un omologia diversa dall'identità che ha con σ a comune il centro e la base, e il cui birapporto è la potenza m^{ma} del birapporto di σ ».

Dim. — Se $\sigma = [W, \alpha]$, e W, A, B, C sono delle F_1 indipendenti allora dalla I del § 6 si ha che $(\sigma W)(\sigma A)(\sigma B)(\sigma C) = (W\alpha + 1)WABC$ e quindi σ è omografia invertibile, o, in altri termini, qualunque potenza di σ è un omografia.

Qualunque sia m si ha dalla I del § 6 che

$$(1) \qquad \sigma^m W = (\text{rapp}\,\sigma)^m W;$$

dalla medesima prop. si ha pure, moltiplicando per σ^{m-1} e tenendo conto della (1), che

$$\sigma^m P = \sigma^{m-1} P + (\text{rapp}\,\sigma)^m (P\alpha) W.$$

Da questa formula per m positivo si deduce che,

$$(2) \quad \sigma^m P = P + [1 + \text{rapp}\,\sigma + (\text{rapp}\,\sigma)^2 + \ldots + (\text{rapp}\,\sigma)^{m-1}](P\alpha) W$$

$$(2)' \quad \sigma^{-m} P = P - [(\text{rapp}\,\sigma)^{-1} + (\text{rapp}\,\sigma)^{-2} + \ldots + (\text{rapp}\,\sigma)^{-m}](P\alpha) W$$

e queste formule dimostrano il teorema (*).

(*) Se poniamo $b = \text{rapp}\,\sigma$ dalle (2), (2)' si ha per m positivo o negativo

$$\sigma^m P = P + \frac{b^m - 1}{b - 1}(P\alpha) W, \quad \text{o,} \quad \sigma^m P = P + m(P\alpha) W$$

secondochè b è diverso da 1 o è uguale ad 1.

Se poniamo $\sigma = [W, \alpha]$ si ha che

$$\sigma^m = \left[W, \frac{b^m - 1}{b - 1}\alpha\right], \quad \text{o,} \quad \sigma^m = [W, m\alpha].$$

Sieno a, b due elementi geometrici proiettivi per i quali abbia ricevuto significato la frase « distanza di a da b »; al posto di questa frase noi scriveremo dist(a, b). Si ha il teorema

II. $\sigma \varepsilon$ Omolog $- \iota 1$. centro $\sigma - \varepsilon$ posiz ω . base $\sigma - =$ posiz ω. $m \varepsilon \mathrm{N} . \supset .$ dist(centro σ, lim σ^m) $=$ dist(base σ, lim σ^{-m}).

« Se σ è un omologia diversa dall'identità il cui centro e la cui base sono elementi propri e se m è un numero intero positivo, allora la distanza del centro di σ dal limite di σ^m è eguale (in valore assoluto) alla distanza della base di σ dal limite di σ^{-m} ».

Dim. — Essendo centro σ e base σ elementi propri, dal teorema VIII del § 6 e dal teorema precedente si deduce che lim σ^m e lim σ^{-m} sono piani proprii paralleli a base σ.

Poniamo $\sigma = [W, \alpha]$ e $b =$ rapp σ. Fissiamo sul piano α il senso positivo della rotazione e sia grand α l'area, col segno, del triangolo α. Sia Δ la distanza, col segno, di centro σ da base σ e Δ_m la distanza, pure col segno, di centro σ da lim σ^m.

Osservando che per $b - = 1$ la forma limite di σ^m è

$$\beta = \omega + \frac{b^m - 1}{b - 1}(W\omega)\alpha$$

si ha che

$$\frac{1}{3}\Delta = \frac{W\alpha}{\text{grand}\,\alpha}; \qquad \frac{1}{3}\Delta_m = \frac{W\beta}{\text{grand}\,\beta}.$$

Ma il triangolo β si ottiene dal prodotto di α per il numero $(W\omega)(b^m - 1)/(b - 1)$ mediante una traslazione e quindi

$$\text{grand}\,\beta = W\omega\,\frac{b^m - 1}{b - 1}\,\text{grand}\,\alpha;$$

È noto (G. Peano, Calcolo Geometrico) che $e^\sigma = 1 + \sigma + \frac{\sigma^2}{2!} + \frac{\sigma^3}{3!} + \dots$ è serie convergente.

Dalla I si deduce con semplici calcoli che

$$e^{\sigma - 1} = \left[W, \frac{e^{b-1} - 1}{b - 1}\alpha\right], \quad \text{o}, \quad e^{\sigma-1} = \sigma.$$

Risulta dunque che $e^{\sigma-1}$ è una omologia che ha con σ a comune il centro e la base e il cui birapporto vale e^{b-1}.

in conseguenza si ha

$$\Delta_m = \frac{b^m}{b^m - 1}\Delta \quad \text{e} \quad \Delta_{-m} = \frac{-1}{b^m - 1}\Delta.$$

Si ha dunque che

$$\Delta_m + \Delta_{-m} = \Delta$$

e questa formula, che vale anche per $b = 1$, dimostra il teorema.

III. $\sigma \varepsilon \text{Omolog.} \supset : \sigma^2 = 1 \,.=.\, \text{rapp}\,\sigma = -1.$

« Un omologia è involutoria solo quando il suo birapporto è eguale a -1 ».

Dim. — La condizione $\sigma^2 = 1$ equivale a $\sigma = \sigma^{-1}$. Questa equivale, qualunque sia P, a $P\alpha = -\frac{1}{\text{rapp}\,\sigma} P\alpha$ e quindi risulta dimostrato il teorema.

IV. $\sigma \varepsilon \text{Omolog} : m \varepsilon \text{N} \,.\, \sigma^m = 1 \,.\, - =_m \Lambda : \supset . \sigma^2 = 1.$

« Se un omologia è ciclica, allora essa è involutoria », e si dimostra come la precedente.

V. $\sigma \varepsilon \text{Omolog.} \supset .\!\cdot .\, \lim \sigma = \lim \sigma^{-1} . = : \sigma^2 = 1 . \smile . \lim \sigma = \text{posiz}\,\omega.$

« Il piano (*) limite di una omologia coincide col piano limite della sua inversa, solo quando o l'omologia è involutoria o il suo piano limite è all'infinito ».

Dim. — La condizione $\lim \sigma = \lim \sigma^{-1}$ equivale a

$$[\omega + (W\omega)\alpha]\left[\omega - \frac{1}{\text{rapp}\,\sigma}(W\omega)\alpha\right] = 0,$$

che sviluppata dà

$$\left(1 + \frac{1}{\text{rapp}\,\sigma}\right)(W\omega)(\alpha\omega) = 0.$$

Dicesi *affinità* ogni omologia diversa dall'identità avente il cen-

(*) Si osservi che se $[W, \alpha]$ è un omologia la forma limite non è nulla perchè $W[\omega + (W\omega)\alpha] = (W\omega)(W\alpha + 1)$.

tro improprio e la base propria. Ad ogni punto proprio corrisponde un punto proprio perchè $W\omega = 0$ e $(\sigma P)\omega = P\omega$. Il rapporto tra un tetraedro e il suo corrispondente è eguale all'inverso del birapporto di affinità (§ 6 prop. V).

Dicesi *omotetia* ogni omologia diversa dall'identità avente il centro proprio e la base impropria. Se W è un punto $(W\omega = 1)$ allora ad ogni punto proprio P corrisponde una forma di prima specie la cui massa è il birapporto di omotetia, poichè (§ 6, II) $(\sigma P)\omega = (W\alpha + 1)P\omega = \text{rapp}\,\sigma$. Segue da ciò e dalla prop. V del § 6 che il rapporto fra un tetraedro e il suo corrispondente (rispetto a posiz σ) vale il cubo dell'inverso del birapporto di omotetia. Essendo W un punto proprio e P un punto proprio si ha che

$$\text{posiz}\,\sigma P = \frac{\sigma P}{\text{rapp}\,\sigma} = W + \frac{1}{\text{rapp}\,\sigma}(P - W)$$

che dà l'ordinaria costruzione dell'omotetico di un punto e dimostra che ad ogni figura corrisponde una figura simile ad essa.

Dicesi *congruenza* ogni omologia il cui centro e la cui base sono elementi impropri. Se $\sigma = [W, \alpha]$, allora $W\alpha = 0$ e quindi $\text{rapp}\,\sigma = 1$. Si ha pure che $\alpha = k\omega$ ove k è un numero e quindi $\sigma P = P + kW$, cioè ogni congruenza è una *traslazione*.

Il lettore riconoscerà facilmente che le omografie proiettive che sono le posizioni delle omologie ora studiate sono le ordinarie omologie proiettive. Noi abbiamo sostituito al termine ordinario « piano dell'omologia » il termine generico base, perchè i teoremi enunciati sono con lievi cambiamenti applicabili anche alle omologie piane. All'usuale termine « caratteristica dell'omologia » abbiamo sostituito il termine « birapporto dell'omologia », poichè rapp σ, da solo, *non caratterizza* l'omologia σ (*). Di più non abbiamo seguito l'uso comune di considerare l'omologia (come del resto ogni trasformazione

(*) Il lettore può facilmente enunciare e dimostrare con i metodi usati fin qui i teoremi ordinari riguardante i vari modi di individuare un'omologia.

proiettiva) come una *doppia* trasformazione tra una *prima* e *seconda* figura e una *seconda* e *prima* figura (*), il che porta p. es. a considerare *due* piani limiti per una sola omologia.

§ 8. — *Prospettività.*

Diciamo *Prospettività* in luogo di « Collineazione a rapporto nullo ». Scrivendo Prospet al posto di prospettività, abbiamo

$$\text{Prospet} = \text{Collin} \frown \overline{\sigma\,\varepsilon}\,\{\text{rapp}\,\sigma = 0\}$$

o più semplicemente

$$\text{Prospet} = \text{Collin} \frown \overline{\text{rapp}}\,0.$$

Se $\sigma = [W, \alpha]$ e W, A, B, C sono F_1 indipendenti allora $(\sigma W)(\sigma A)(\sigma B)(\sigma C) = 0$ quando $\text{rapp}\,\sigma = W\alpha + 1 = 0$ e quindi: « le prospettività non sono invertibili », vale a dire, se σ è una prospettività σ^{-1} non è una omografia.

I. $\sigma\,\varepsilon\,\text{Prospet}\,.\,\supset.\,\text{centro}\,\sigma\,\varepsilon\,\lim\sigma$

II. $\sigma\,\varepsilon\,\text{Prospet}\,.\,P\,\varepsilon\,F_1 - \iota 0\,.\,\supset.\,\text{posiz}\,\sigma P\,\varepsilon\,\text{base}\,\sigma.$

La prop. I esprime che in ogni prospettività il centro appartiene alla figura limite. Ciò è evidente se $\lim\sigma$ è tutto lo spazio; se $\lim\sigma$ è un piano allora $\omega + (W\omega)\alpha - = 0$ e $W[\omega + (W\omega)\alpha] = = \text{rapp}\,\sigma(W\omega) = 0$ che dimostra il teorema.

La prop. II esprime che ogni forma di prima specie ha per corrispondente una forma avente la posizione in base σ.

Se W è un punto proprio e base σ non è il piano all'infinito, allora posiz σ è l'ordinaria PROIEZIONE CENTRALE (**) di cui W è il

(*) Si presenta con questo metodo ordinario sotto una forma incompleta e non ancora precisata il concetto di corrispondenza. Riguardo alle notazioni centro σ, base σ, lim σ osserviamo che esse permettono di *rappresentare* nel disegno due o più omologie piane e di *leggere* la figura senza bisogno di altre indicazioni. Ciò non si raggiunge con le ordinarie notazioni.

(**) Indichiamo qui un sistema di notazioni per la proiezione centrale che ci sembra possano utilmente sostituire le notazioni ordinarie assai incomplete. Essendo F una figura (classe di punti) si indichi (come si fa ordinariamente) con

centro e base σ è il *quadro*. Se W è un vettore, cioè centro σ è un punto all'infinito, allora posiz σ è un ordinaria PROIEZIONE PARALLELA.

Qualunque sia la forma P non nulla e di prima specie poniamo

$$\Delta_P = \frac{P\alpha}{\operatorname{grand} \alpha} \quad \text{e} \quad \Delta = \Delta_W.$$

Se P è un punto proprio allora Δ_P è la distanza, col segno, da base σ. Se P è un vettore e O è un punto qualunque proprio di base σ, allora si ha che $\Delta_P = \Delta_{O+P}$, cioè Δ_P è la distanza da base σ dell'estremo del vettore P quando l'origine di P sia un punto di base σ. Dalla prop. I del § 6, osservando che $W\alpha = -1$, si ha che

$$\sigma P = P - \frac{\Delta_P}{\Delta} W. \tag{1}$$

Se prendiamo Δ per unità di misura si ha dalla (1)

$$P = \sigma P + \Delta_P W. \tag{2}$$

Essendo W un elemento fisso, la (2) prova che la forma P è *rappresentata* dando la forma σP sul piano proprio base σ e il numero Δ_P. Se P è un punto proprio o un vettore, allora, per la proiezione centrale, σP è una forma di massa $1 - \Delta_P$ o di massa $-\Delta_P$; per la proiezione parallela σP è un punto proprio o un vettore; in quest'ultimo caso, se W è un vettore normale a base σ, si ha che posiz σ è l'ordinaria PROIEZIONE QUOTATA.

F' il luogo delle immagini (o proiezioni) dei punti di F; questa notazione è incompleta perchè dovrebbe contenere l'indicazione del centro e del quadro; essa basta però in pratica poichè è inutile, in ogni caso, cambiare gli elementi di riferimento. Si scriva, p. es., J al posto di punto all'infinito; allora, se a è una retta, Ja (al posto di $J \frown a$) vale « punto all'infinito di a »; quindi $(Ja)'$ vale « punto di fuga di a »: in luogo di $(Ja)'$ si può scrivere $J'a$, non però Ja' che vale « punto all'infinito dell'immagine di a ». Analogamente, se α è un piano, $J\alpha$ vale « retta all'infinito di α » e $(J\alpha)'$ o $J'\alpha$ vale « retta di fuga di α ». Indicando con la lettera fissa, p. es., π, il quadro, allora $a\pi$, $\alpha\pi$ (al posto di $a \frown \pi$, $\alpha \frown \pi$) indicano la *traccia* di a e di α. Nel disegno, p. es., un punto con l'indicazione $a\pi = J'a$ rappresenta la retta a che passa per il centro di proiezione; due rette parallele con le indicazione $\alpha\pi$, $J'\alpha$ rappresentano il piano α, e questa notazione è molto più chiara dell'ordinaria (s, q').

Se Q, R sono delle F_1 qualunque, dalla (2) si ha

$$(2)' \qquad PQ = (\sigma P)(\sigma Q) + [\Delta_Q(\sigma P) - \Delta_P(\sigma Q)]\,W$$

$$(2)'' \qquad \begin{aligned} PQR = {} & (\sigma P)(\sigma Q)(\sigma R) + \\ & + [\Delta_P(\sigma Q)(\sigma R) + \Delta_Q(\sigma R)(\sigma P) + \Delta_R(\sigma P)(\sigma Q)]\,W \end{aligned}$$

e si ottiene così la rappresentazione della forma di seconda specie PQ e della forma di terza specie PQR mediante gli elementi che rappresentano P, Q, R. Dalle formule (2), (2)′, (2)″ si possono ottenere le ordinarie proprietà delle proiezioni centrali e parallele. Però ciò che più interessa far rilevare è che dalle formule (2), (2)′, (2)″ si può dedurre la *geometria descrittiva delle forme geometriche*, la cui importanza si rende evidente osservando che le F_2 rappresentano sistemi di forze e che quindi un metodo semplice di rappresentazione delle F_2 conduce a risolvere rapidamente il problema della composizione delle forze nello spazio, problema che con i metodi ordinari (Monge) è assai complicato.

Sia $\sigma = [W, \alpha]$ una prospettività. Se β è una F_3 non nulla noi possiamo individuare in infinite modi tre forme di prima specie A, B, C tali che A e B appartengano ad α e a β, C appartenga a β e il tetraedro $WABC$ non sia nullo. Si ha che (§ 6, I)

$$\sigma A = A, \qquad \sigma B = B, \qquad \sigma C = C + rW$$

ove $r = C\alpha$ è un numero. Alla σ si può dunque dare la forma

$$(3) \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 0, & A, & B, & C + rW \\ W, & A, & B, & C \end{pmatrix}$$

e σ, che è una corrispondenza tra le F_1 dello spazio e le F_1 del piano α è anche una corrispondenza tra le F_1 del piano β e le F_1 del piano α. Indicando con λ questa trasformazione lineare tra due sistemi di F_1 a tre dimensioni si ha che

$$(4) \qquad \lambda = \begin{pmatrix} A, & B, & C + rW \\ A, & B, & C \end{pmatrix}.$$

L'omografia λ dicesi prospettività tra le F_1 di β e le F_1 di α. Essa è invertibile e λ^{-1} è una prospettività tra le F_1 di α e le F_1 di β. Noi chiamiamo centroλ il centroσ, baseλ la retta $\alpha\beta$=rettaAB, limλ l'elemento geometrico comune al piano β e a limσ. Se limλ è una retta propria, anche limλ^{-1} è una retta propria e limλ e limλ^{-1} sono parallele a base λ.

È facile riconoscere che posizλ è l'ordinaria prospettività di centro il punto W tra il piano β e il piano α.

Se I, J, K sono vettori unità (o di egual modulo) se J e K sono normali ad I e se O è un punto proprio, allora ponendo

$$\lambda = \begin{pmatrix} O, & I, & K \\ O, & I, & J \end{pmatrix}$$

si ha che λ è una *rotazione* del piano OIK intorno alla retta OI dell'angolo (K, J), ovvero un *ribaltamento* del piano OIK sul piano OIJ; l'altro ribaltamento è dato da

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} O, & I, & -K \\ O, & I, & J \end{pmatrix}$$

e così dei due ribaltamenti di un piano in un altro resta fissato anche il senso, quando sia dato il senso della rotazione positiva sul piano normale ai due piani dati.

§ 9. — *Teoremi.*

In ciò che segue σ_1, σ_2, σ_3, ... sono collineazioni, e poniamo, per $r = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\sigma_r = [W_r, \alpha_r], \qquad h_r = \text{rapp}\, \sigma_r.$$

Teorema I.—Se R, S sono sistemi lineari di F_1, se σ_2 è collineazione invertibile tra le R e le S, se $\sigma_2 W_1 -= 0$, e se $\lambda = \sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}$, allora: 1° λ è una collineazione tra le F_1 di S e le F_1 di $\sigma_2\sigma_1 R$; 2° il centro di λ è la posizione del corrispondente rispetto a σ_2

della forma centro di σ_1 [centro $\lambda =$ posiz σ_2 (centro σ_1)]; 3° la base di λ è il luogo delle posizioni delle corrispondenti rispetto a σ_2 delle F_1 giacenti in R e in base σ_1.

Dim. — Sia Q una F_1 di R. Dalla I del § 6 si ha

$$\sigma_2(\sigma_1 Q) = \sigma_1 Q + [(\sigma_1 Q)\alpha_2] W_2.$$

Sostituendo nel secondo membro al posto di $\sigma_1 Q$ il valore dato dalla I del § 6, si ha dopo semplici sviluppi e ancora per la I del § 6,

$$(1) \qquad \sigma_2 \sigma_1 Q = \sigma_2 Q + (Q\alpha_1)\sigma_2 W_1.$$

Se poniamo $\sigma_2 Q = P$, si ha che $Q = \sigma_2^{-1} P$, perchè σ_2 è invertibile tra le R e le S, e quindi la (1) diviene

$$(1)' \qquad \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} P = P + [(\sigma_2^{-1} P)\alpha_1]\sigma_2 W_1.$$

Questa formula dimostra il teorema, perchè λP è funzione lineare di P e di $\sigma_2 W_1$ e perchè, essendo $\sigma_2 W_1 -= 0$, le P appartenenti alla base di λ sono quelle tali che $(\sigma_2^{-1} P)\alpha_1 = 0$.

Corollario. Se, stando le ipotesi del teorema I, si ha che σ_1, σ_2 sono omologie, allora, λ è un'omologia, centro $\lambda =$ posiz σ_2 (centro σ_1), base $\lambda =$ posiz σ_2 (base σ_1), e rapp $\lambda =$ rapp σ_1. Infatti in tal caso $R = S = F_1$ e quindi $\lambda\sigma_2 W_1 = \sigma_2\sigma_1 W_1 = \sigma_2(b_1 W_1) = b_1(\sigma_2 W_1)$.

Il lettore può verificare facilmente che se nel teorema I si pone posiz $R =$ base σ_1, posiz $S =$ base σ_2 e σ_1, σ_2 sono prospettività, allora λ è un'omologia sul piano base σ_2, e per posiz λ si ottiene la nota proprietà delle proiezioni da due centri diversi di una figura piana in un piano. Analogamente, se si pone posiz $R =$ base σ_2 e σ_1, σ_2 sono prospettività, allora λ è un'omologia sul piano base σ_2 e per posiz λ si ottiene la nota proprietà della proiezione in un piano di due sistemi piani prospettivi. È noto che le due proprietà ora ricordate sono fondamentali per la risoluzione dei problemi proiettivi nella geometria descrittiva.

Teorema II.—Se R, S, T sono sistemi lineari di F_1, se σ_1 è

una collineazione tra R e S, se σ_2 è una collineazione tra S e T, e $\left\{\begin{array}{l}\text{base } \sigma_1 = \text{base } \sigma_2 \\ \text{centro } \sigma_1 = \text{centro } \sigma_2\end{array}\right\}$, allora:

1° $\sigma_2 \sigma_1$ è una collineazione tra R e T;

2° $\left\{\begin{array}{l}\text{base } \sigma_2 \sigma_1 = \text{base } \sigma_1 \\ \text{centro } \sigma_2 \sigma_1 = \text{centro } \sigma_1\end{array}\right\}$;

3° $\left\{\begin{array}{l}\text{i centri delle collineazioni } \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_2\sigma_1 \text{ sono in linea retta} \\ \text{le basi delle collineazioni } \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_2\sigma_1 \text{ passano per una retta}\end{array}\right\}$;

4° $\operatorname{rapp}(\sigma_2\sigma_1) = (\operatorname{rapp}\sigma_1)(\operatorname{rapp}\sigma_2)$.

Dim. — Se P è una F_1 di R, allora per la I del § 6 si ha facilmente che

$$(2) \qquad \sigma_2\sigma_1 P = P + (P\alpha_1) W_1 + [P\alpha_2 + (P\alpha_1)(W_1\alpha_2)] W_2.$$

Se supponiamo base $\sigma_1 =$ base σ_2, allora

$$\alpha_2 = k\alpha_1,$$

ove k è un numero, e la (2) diviene

$$(3) \qquad \sigma_2\sigma_1 P = P + (P\alpha_1)[W_1 + k b_1 W_2]$$

e questa formula dimostra immediatamente le prime tre parti della tesi. Dalla (3) risulta che $\sigma_2\sigma_1 = [W, \alpha_1]$ ove $W = W_1 + k b_1 W_2$; si ha che

$$\operatorname{rapp}(\sigma_2\sigma_1) = W\alpha_1 + 1 = W_1\alpha_1 + 1 + k b_1 W_2 \alpha_1 = b_1 + b_1 W_2 \alpha_2 = b_1 b_2$$

e questa dimostra la terza parte della tesi.

In modo analogo si dimostra il teorema quando centro $\sigma_1 =$ centro σ_2 cioè $W_2 = k W_1$.

Corollario I. — Se stando le ipotesi del teorema II si ha che σ_1, σ_2 sono omologie, allora $\sigma_2\sigma_1$ è un'omologia. Infatti b_1, b_2 non sono nulli e quindi $\operatorname{rapp}(\sigma_2\sigma_1)$ non è nullo.

Corollario II. — Se stando le ipotesi del teorema II in alto si ha che σ_1, σ_2 sono prospettività e centro σ_2 è un punto all'infinito,

allora $\lim \sigma_2 \sigma_1 \doteq \lim \sigma_1$. Infatti la forma limite di $\sigma_2 \sigma_1$ è, per le cose precedenti, $\omega + [(W_1 + k h_1 W_2)\omega]\alpha_1 = \omega + (W_1 \omega)\alpha_1$ che è la forma limite di σ_1.

Il lettore può facilmente verificare che, se σ_1 è una prospettività a centro e base propria, se $T = R$ e σ_2 è una rotazione di S intorno a base σ_1 o è un ribaltamento di S in R, allora le proprietà della omografia proiettiva posiz$(\sigma_2 \sigma_1)$ danno le note proprietà del centro e della retta limite di una prospettività fra due sistemi piani quando uno dei piani ruota intorno alla base della prospettività (*). È noto che la proprietà ora ricordata è fondamentale per la risoluzione dei problemi metrici nella geometria descrittiva.

Torino, gennajo 1897.

C. Burali-Forti.

(*) Conserviamo le notazioni indicate nella nota a pp. 76-77 per una proiezione centrale. Sia α un piano non parallelo al quadro e non uscente dal centro di proiezione, e sia s una retta di fronte di α. Sia $\Omega_{\alpha,s}$ l'omologia (piana sul quadro) che ha per base l'immagine di s, per retta limite la retta di fuga $J'\alpha$ del piano α e per centro il ribaltamento sul quadro del centro di proiezione, essendo tale ribaltamento fatto intorno ad $J'\alpha$ in un dato senso. L'omologia $\Omega_{\alpha,s}$ applicata all'immagine di una figura di α dà l'immagine del ribaltamento della stessa figura sul piano di fronte che passa per la retta s. Se α_1, α_2 sono piani paralleli soddisfacenti alle condizioni di α e s_1, s_2 sono rette di fronte di α_1 e α_2 allora le omologie Ω_{α_1,s_1}, Ω_{α_2,s_2} hanno a comune la retta limite e il centro se i ribaltamenti si fanno nello stesso senso; in conseguenza $\Omega_{\alpha_1,s_1} = \Omega_{\alpha_2,s_2}$ solo quando le rette s_1, s_2 stanno in un piano uscente dal centro di proiezione. Come abbiamo già indicato (Rivista di matematica, vol. II) questa proprietà è utilissima in geometria descrittiva. Si ottiene p. es., l'immagine del contorno apparente di una superficie di rivoluzione applicando l'inversa di un omologia $\Omega_{\alpha,s}$ all'inviluppo di un sistema di circonferenze che sono le immagini dei ribaltamenti dei paralleli in un sistema di piani di fronte, sistema che resta individuato dall'omologia $\Omega_{\alpha,s}$. Ecc.

SUL PRINCIPIO DI DIRICHLET.

Osservazione del Prof. **Vito Volterra**, in Torino.

Adunanza del 28 febbrajo 1897.

1. In quasi tutti i corsi sulla teoria del potenziale newtoniano o logaritmico si suole esporre la dimostrazione di Neumann sul principio di Dirichlet (*).

Ma nella trattazione del detto metodo si incontra ordinariamente una difficoltà, la quale, senza infirmare il metodo stesso, può dar luogo a qualche oscurità.

In un corso di lezioni del 1888 (**) tentai superarla, ed alcuni miei colleghi avendo sperimentato favorevolmente la osservazione che feci in proposito desiderarono che venisse pubblicata, il che mi permetto di far qui brevemente.

Noterò ancora che ci si può valere della stessa osservazione nell'esporre il metodo di Robin per la determinazione della densità d'uno strato di livello (***) e così in alcune altre questioni analoghe.

(*) Ueber die Methode des aritmetischen Mittels I, II Abh. XIII, XIV Bd. d. Abh. d. K. Sächs. Gesell. d. Wiss.

(**) In quell'anno mi limitai al potenziale logaritmico. Il Dott. Bigiavi in un corso successivo applicò lo stesso procedimento al potenziale newtoniano.

(***) Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CIV.

2. Non starò a spiegare in che cosa consista la dimostrazione di Neumann e mi varrò senz'altro della denominazione di *funzione aggiunta* ormai generalmente adottata.

Col metodo di Neumann si giunge a provare che se U è una funzione finita e continua data sul contorno convesso e P è la sua aggiunta, si ha

$$\frac{\text{oscillazione } P}{\text{oscillazione } U} < \lambda < 1,$$

in cui λ è un numero indipendente dalla funzione U, ma che dipende solo dalla forma del contorno.

Tale dimostrazione è pienamente rigorosa quando è possibile dividere il contorno in un numero finito di pezzi in ciascuno dei quali U è superiore al suo valore medio (*), mentre negli altri è inferiore o eguale al valore medio stesso.

Ma nel caso del potenziale logaritmico in cui il contorno è una linea si vede facilmente che questo fatto potrà non presentarsi quando la funzione U fa un numero infinito di oscillazioni pur essendo continua, e nel caso del potenziale newtoniano si comprende facilmente che la detta divisione in due parti del contorno darà luogo a difficoltà ancora maggiori.

Per togliere nelle dimostrazioni ogni dubbio, che perciò potrebbe presentarsi, basterà provare che ogni funzione finita e continua U può mettersi sotto la forma di una serie convergente in egual grado

$$U = \sum_1^\infty U_i,$$

in cui per ciascuna $\sum_1^n U_i$ può eseguirsi la divisione del contorno in un numero finito di parti, in alcune delle quali $\sum_1^n U_i$ sia maggiore del suo valor medio, mentre nelle rimanenti è minore o eguale al detto valore; giacchè, una volta dimostrato questo, avremo che

(*) Per valore medio intendo qui la media fra il massimo ed il minimo valore della funzione.

la serie delle funzioni aggiunte $P = \sum_1^\infty P_i$ sarà pure uniformemente convergente, e

$$\frac{\text{oscillazione} \sum_1^n P_i}{\text{oscillazione} \sum_1^n U_i} < \lambda,$$

quindi il rapporto

$$\frac{\text{oscillazione } P}{\text{oscillazione } U} = \frac{\text{oscillazione} \sum_1^\infty P_i}{\text{oscillazione} \sum_1^\infty U_i}$$

non potrà superare λ.

3. Ora il detto teorema nel caso in cui il contorno in cui è definito U è lineare si dimostra così.

La U può ritenersi come una funzione di una variabile x definita in un intervallo (ab); onde, considerando x, y come un sistema di coordinate cartesiane, $y = U(x)$ rappresenterà una linea L nel piano x, y.

Dividiamo (ab) in n_i parti in modo che entro ciascuna di esse U faccia una oscillazione minore di $\frac{\sigma}{i}$. Prendiamo i punti di L che hanno per proiezione sull'asse x i punti di divisione, consideriamo la spezzata che ha per vertici i detti punti di L, e chiamiamo $y = f_i(x)$ la sua equazione. Allora la serie (1) sarà subito costruita prendendo

$$U_i = f_i - f_{i-1}, \qquad f_0 = 0.$$

Nel caso in cui il contorno sia una superficie convessa proiettiamola da un punto interno sopra una superficie sferica avente il centro in quel punto. Potremo evidentemente considerare U come una funzione dei punti della superficie sferica e determinando questi punti mediante la latitudine θ e la longitudine φ, potremo conside-

rare U come una funzione di θ e φ. Supponendo poi che θ, φ, z siano un sistema di coordinate cartesiane, avremo che $z = U(\theta, \varphi)$ rappresenterà una superficie che si proietterà sul piano θ, φ secondo un rettangolo di lati rispettivamente eguali a π e a 2π.

Si divida questo rettangolo colle parallele agli assi in n_i rettangoli in modo che corrispondentemente a ciascuno di essi la oscillazione della funzione $z = U(\theta, \varphi)$ sia minore di $\frac{\sigma}{i}$ (*) e si inscriva entro la superficie una superficie poliedrica a fascie triangolari i cui vertici si proiettino nei punti di divisione. Se $z = f_i(\theta, \varphi)$ è l'equazione di questa superficie poliedrica, si otterrà la serie (1) prendendo $U_i = f_i - f_{i-1}$, $f_0 = 0$.

4. La dimostrazione fatta nel § precedente nel caso del contorno lineare consiste nel dedurre dal principio della continuità uniforme la proprietà che ha qualsiasi funzione finita e continua di potersi considerare come limite di una funzione finita e continua *avente un numero limitato di massimi e di minimi,* la quale tende uniformemente alla prima.

Questa proprietà giova in varii casi, oltre che nella dimostrazione del principio di Dirichlet. Così, per esempio, tenendo conto che una funzione finita e continua che ha un numero limitato di massimi e di minimi è sviluppabile in serie di Fourier uniformemente convergente, potremo concludere senz'altro che ogni funzione finita e continua ammette una rappresentazione mediante un polinomio finito di Fourier con una approssimazione data qualsiasi.

Questo bel teorema che il Picard (**) deduce dall'integrale di Poisson e dal quale egli fa dipendere una celebre proposizione di Weierstrass, risulta così provato in via immediata e diretta.

Torino, 15 febbrajo 1897.

VITO VOLTERRA.

(*) Ciò potrà farsi giacchè le funzioni continue di più variabili sono, al pari di quelle ad una variabile, uniformemente continue.

(**) Traité d'Analyse, Tome I, page 257.

SOPRA LA COSTRUZIONE DEL GRUPPO DELL'ICOSAEDRO.

Nota del Dr. **G. Bagnera**, in Palermo.

Adunanza del 28 febbrajo 1897.

Il sig. H. Weber al § 52 del secondo volume del suo eccellente trattato « Lehrbuch der Algebra » si propone di costruire un gruppo finito di sostituzioni del tipo $\left(x, \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)$, che possegga 12 poli quintupli, 20 poli tripli e 30 poli doppi. Le costanti α, β, γ, δ sono sottoposte solamente alla condizione di essere scelte nel campo dei numeri immaginarî in modo tale che il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ risulti diverso da zero. Un tale gruppo esiste di fatto ed è il notissimo gruppo dell'icosaedro.

Per costruire questo gruppo l'Autore osserva anzitutto che, ammessa l'esistenza, esso, od un suo isomorfo, contiene necessariamente le sostituzioni

$$\theta = (x, \varepsilon x), \qquad \psi = \left(x, \frac{-1}{x}\right),$$

dove ε è una radice immaginaria quinta dell'unità, e trova che allora i 12 poli quintupli sono 0, ∞ ed i numeri espressi da

$$\varepsilon^\lambda \omega, \qquad \varepsilon^\lambda \omega', \qquad\qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3, 4)$$

mente una sostituzione del tipo

$$\chi = \left(x, \frac{\omega x + \beta}{x - \omega}\right),$$

la quale trasforma poi il polo o in $-\frac{\beta}{\omega} = \beta\omega'$. Siccome o ed ∞ sono i due poli di una stessa sostituzione, lo stesso avviene per ω e $\beta\omega'$ che sono i trasformati mediante χ; ma ω ed $\varepsilon^\lambda\omega$ non possono essere i due poli di una stessa sostituzione, perchè allora dovrebbero essere tali i trasformati mediante Θ^λ, cioè $\varepsilon^\lambda\omega$ ed $\varepsilon^{2\lambda}\omega$, e così si avrebbero due sostituzioni con un solo polo $\varepsilon^\lambda\omega$ in comune. Quindi $\beta\omega'$ deve essere della forma $\varepsilon^\lambda\omega'$, e perciò β è una potenza di ε; in altri termini, χ è della forma

$$\left(x, \frac{\omega x + \varepsilon^\lambda}{x - \omega}\right).$$

Dippiù, diciamo che l'esponente λ è nullo. Infatti, se fosse altrimenti, il trasformato di ω' mediante χ, che è $\frac{\varepsilon^\lambda - 1}{\omega' - \omega}$, non essendo zero, è della forma $\varepsilon^\alpha\omega$ o della forma $\varepsilon^\alpha\omega'$, con α intero; allora, in entrambi i casi, si concluderebbe che la differenza $\varepsilon^{\lambda-\alpha} - \varepsilon^{-\alpha}$ di due radici quinte diverse dell'unità è reale.

Concludiamo dunque che il gruppo che si cerca contiene la sostituzione

$$\chi = \left(x, \frac{\omega x + 1}{x - \omega}\right);$$

poi, le tre sostituzioni Θ, ψ, χ generano effettivamente un gruppo di grado 60 che soddisfa le condizioni volute.

Palermo, 28 febbrajo 1897.

G. BAGNERA.

SULLO SVILUPPO D'UNA FUNZIONE UNIFORME DI VARIABILE COMPLESSA, DOTATA DI SINGOLARITÀ ISOLATE, IN SERIE COLLE CARATTERISTICHE SEPARATE.

Nota di F. Buoca, in Palermo.

Adunanza del 28 febbrajo 1897.

1. Dato nel piano della variabile complessa un insieme d'infiniti punti isolati, colle affisse a_0, a_1, ... a_i ..., in guisa che si possono ordinare le quantità a_0, a_1, a_2 ... per ordine di grandezza dei loro moduli (disponendo in quell'ordine che si vorrà quelle di esse che han lo stesso modulo) (*), e data, corrispondentemente a ciascuno dei punti a_i, una serie di potenze intere e negative di $x-a_i$, senza termine costante, convergente in tutto il piano tranne che nel punto a_i; è noto (**) come si possa sempre costruire un'e-

(*) Volendo usare le denominazioni del Cantor « Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre » (Math. Annalen, Bd. 46), diremo: È dato un insieme ordinato di punti nel piano, il cui *tipo ordinatore* è ω, cioè un insieme la cui potenza è *aleph-zero* e tale che di due elementi a_ν, $a_{\nu+1}$ (ν è un numero cardinale finito) viene a_ν prima di $a_{\nu+1}$, quando $|a_\nu| < |a_{\nu+1}|$ e, nel caso di $|a_\nu| = |a_{\nu+1}|$, quando $\arg. a_\nu < \arg. a_{\nu+1}$.

(**) Cfr. G. Mittag-Leffler: « Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante (Acta Mathematica, t. IV, 1884).

spressione analitica, la quale rappresenti una funzione analitica $f(x)$ avente per punti critici i punti $a_1, a_2, a_3 \ldots$ colle caratteristiche $G_0\left(\frac{1}{x-a_0}\right)$, $G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right)$, $G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right) \ldots$, cioè una funzione che nell'intorno di ciascuno dei punti a_l è rappresentabile sotto la forma

$$f(x) = G_l\left(\frac{1}{x-a_l}\right) + \varphi(x-a_l),$$

essendo $\varphi(x-a_l)$ una funzione olomorfa nell'intorno di a_l.

L'espressione è la seguente:

$$f(x) = G_0\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_{l=1}^{\infty}\left[G_l\left(\frac{1}{x-a_l}\right) - P_l(x)\right],$$

in cui $P_l(x)$ son dei polinomi in x, i cui gradi, in generale, crescono con l, costruiti in guisa da rendere convergente, nell'intorno di ogni punto x a distanza finita, la serie delle caratteristiche, ed in cui $G_0\left(\frac{1}{x}\right)$ indica la caratteristica nell'origine, che si suppone corrispondente al valore a_0.

È noto ancora che, in casi speciali, possono esistere diverse leggi di formazione dei polinomi $P_l(x)$, e può anche avvenire che possano scegliersi polinomi P_l coi gradi tutti inferiori ad un numero finito, i quali per conseguenza posson considerarsi tutti dello stesso grado finito, che noi vogliamo indicare con $m - 1$.

Quando ciò avviene, avremo dunque una serie, il cui termine generale è

$$G_l\left(\frac{1}{x-a_l}\right) - P_l(x),$$

dove P_l è un polinomio variabile con l, ma di grado costante $m - 1$, e noi diremo tal serie *uno sviluppo d'ordine m*.

Si hanno sviluppi d'ordine finito, quando le singolarità nei

punti a_l sono singolarità polari di ordine p le più generali, per guisa che si ha

$$G_l\left(\frac{1}{x-a_l}\right)=\sum_{i=1}^{p}\frac{A_l^{(i)}}{(x-a_l)^i}$$

ed esiste un numero finito m tale che le serie

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left|\frac{A_l^{(i)}}{a_l^{m+1}}\right| \qquad (i=1,2,\ldots p)$$

sian convergenti (*). Ma se le singolarità non sono singolarità polari, ovvero se, essendo singolarità polari, l'ordine del polo dipende da l in guisa da crescere indefinitamente al crescere di l, ovvero se l'insieme è tale che non sia possibile trovare un numero finito m, pel quale le serie $\sum_{l=1}^{\infty}\left|\frac{A_l^{(i)}}{a_l^{m+1}}\right|$ sian convergenti (come p. es. avviene se $a_l=\log l$, ovvero $a_l=\log\log l, \ldots$ ed $A_l=1$), allora non si può dire, senza ulteriore esame, se colle caratteristiche e coll'insieme dato possano formarsi sviluppi *d'ordine finito*.

2. I teoremi di Mittag-Leffler e di Hermite sono molto utili quando data una funzione uniforme $f(x)$ avente singolarità isolate, si voglia svilupparla in serie colle caratteristiche separate; con essi però rimane incognita una parte dello sviluppo. Formando, infatti, le caratteristiche per mezzo della nota formola di Laurent

$$G_l\left(\frac{1}{x-a_l}\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_l}\frac{f(z)}{z-x}dz=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{\infty}(x-a_l)^{-\nu}\int_{\gamma_l}(z-a_l)^{\nu-1}f(z)dz,$$

dove γ_l è un cerchio descritto col centro in a_l e di raggio sufficientemente piccolo perchè esso stia nell'intorno di a_l, si può col procedimento del Mittag-Leffler, in ogni caso, e con quello di

(*) Hermite: « Sur quelques points de la théorie des fonctions ». (Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, t. XII; Journal für Mathematik, Bd. 92).

Hermite, in casi speciali, formare un'espressione analitica $F(x)$, che ha le medesime singolarità della funzione $f(x)$; allora la differenza $f(x) - F(x)$, non avendo più singolarità a distanza finita, è una funzione intera che resta ignota e che bisogna determinare caso per caso.

Ci proponiamo di dare un metodo per la formazione, in generale, di tale funzione intera; ma, appunto perchè possono esistere della funzione data $f(x)$ parecchi sviluppi, diversi, in serie colle caratteristiche separate, porremo la questione nei termini seguenti:

Data una funzione $f(x)$ uniforme, avente singolarità isolate, e data una legge di costruzione dei polinomi P_l tali che la serie

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left[G_l\left(\frac{1}{x-a_l}\right) - P_l(x)\right]$$

sia convergente uniformemente nell'intorno di ogni punto a distanza finita, diverso dai punti a_l, determinare la funzione intera $g(x)$ che bisogna aggiungere ad essa affinchè sia

$$(1)\quad f(x) = g(x) + G_0\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_{l=1}^{\infty}\left[G_l\left(\frac{1}{x-a_l}\right) - P_l(x)\right]. .$$

S'intende che noi vogliamo riferirci a quei casi, in cui il metodo stesso per costruire i polinomi P_l non costruisce la funzione $g(x)$. Dimostreremo, infatti, in seguito (n° 6) che della funzione esiste uno sviluppo d'ordine non superiore ad $r+1$, quando si può trovare un numero finito r in guisa che $\left|\frac{f(x)}{x^r}\right|$ si mantiene inferiore ad un numero fisso mentre x si muove su una circonferenza qualunque d'una successione di circoli, che hanno i centri nell'origine ed i raggi indefinitamente crescenti, e che non passano per alcuno dei punti singolari. Il metodo, che daremo per la formazione dei polinomi P_l, dà lo sviluppo completo della funzione senza l'indeterminazione di qualche sua parte.

3. Per metterci nel caso più generale, supponiamo che in (1)

il grado del polinomio P_l sia $m_l - 1$, variabile con l, sicchè si abbia

$$P_l(x) = \sum_{\nu=0}^{m_l-1} A_{l,\nu} x^\nu .$$

Pensiamo ad una successione qualunque di numeri positivi crescenti indefinitamente R_1, R_2, ... R_k ..., tale però che sulle varie circonferenze C_1, C_2, ... C_k ..., che hanno il centro nell'origine e per raggi R_1, R_2, ... R_k ..., non cada alcuno dei punti a_l; dentro uno qualunque dei cerchi C_k trovasi adunque un numero limitato di punti singolari per la funzione $f(x)$.

Partiamo dalla relazione

$$(1') \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f(z)}{z - x} dz + \sum_{C_k} G_l\left(\frac{1}{x - a_l}\right),$$

in cui il segno sommatorio va esteso a tutte le caratteristiche relative ai punti a_l, compresa l'origine, che cadono dentro C_k, e che supporremo in numero di n_k, x è un punto qualunque interno a C_k diverso dai punti a_l. Tale relazione è valida solo dentro C_k e si ottiene colla considerazione che, avendo la funzione $f(x)$ dentro C_k un numero finito di punti singolari, ed essendo continua al contorno, è lecito applicare il teorema dei residui di Cauchy.

È evidente che, se nella relazione precedente facciamo crescere indefinitamente k, potremo anche rappresentare la $f(x)$ sotto forma d'un limite

$$(2) \qquad f(x) = \lim_{k=\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f(z)}{z - x} dz + \sum_{C_k} G_l\left(\frac{1}{x - a_l}\right)\right],$$

e, sotto questa forma, x può essere un punto qualunque del piano, diverso dai punti a_l.

Questo modo di rappresentare la $f(x)$ è valido qualunque sia la funzione $f(x)$, purchè dotata di singolarità isolate. La funzione intera $g(x)$, che entra nello sviluppo (1), resterà adunque determinata dai due differenti modi (1) e (2) di rappresentare la $f(x)$; scri-

vendo la (1) nella forma

$$f(x) = g(x) + G_0\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{k=\infty} \sum_{l=1}^{n_k} \left[G_l\left(\frac{1}{x - a_l}\right) - P_l(x) \right]$$

e sottraendone la (2), si ricava:

$$g(x) = \lim_{k=\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f(z)}{z - x} dz + \sum_{l=1}^{n_k} P_l \right],$$

ovvero:

$$g(x) = \lim_{k=\infty} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \sum_{l=0}^{n_k} \sigma_{\nu+1,l} + \sum_{l=1}^{n_k} \sum_{\nu=0}^{m_l - 1} A_{l,\nu} x^\nu \right], \tag{3}$$

avendo all'integrale sostituito il suo sviluppo in serie, valido dentro al cerchio C_k, ed avendo indicato con $\sigma_{\nu+1,l}$ il residuo della funzione $\frac{f(z)}{z^{\nu+1}}$ nel punto a_l.

4. Supponiamo che lo sviluppo (1) della funzione $f(x)$ sia dell'ordine m; allora la doppia somma

$$\sum_{l=1}^{n_k} \sum_{\nu=0}^{m_l - 1} A_{l,\nu} x^\nu$$

viene ad essere la somma d'un numero finito di polinomi tutti dello stesso grado $m - 1$, e però si può mettere sotto la forma d'un polinomio unico, i cui coefficienti son somme che, al crescere di k, diventan serie; cioè si può rappresentare con

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu \sum_{l=1}^{n_k} A_{l,\nu}.$$

In tal caso la (3) si può scrivere:

$$g(x) = \lim_{k=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \sum_{l=0}^{n_k} (\sigma_{\nu+1,l} + A_{l,\nu}) \tag{4}$$

convenendo di assumere

$$A_{0,\nu} = 0 \qquad \text{per tutti i valori di } \nu,$$

$$A_{l,m} = A_{l,m+1} = \ldots = 0 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad l.$$

Ora io dico che si può in (4) passare al limite termine a termine, e quindi si ha:

$$(5) \qquad \begin{aligned} g(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \sum_{l=0}^{\infty} (\sigma_{\nu+1,l} + A_{l,\nu}) \\ &= \sum_{\nu=0}^{m-1} x^\nu \sum_{l=0}^{\infty} (\sigma_{\nu+1,l} + A_{l,\nu}) + \sum_{\nu=m}^{\infty} x^\nu \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{\nu+1,l}. \end{aligned}$$

Infatti, derivando la (1) e la (1'), e designando con $f^{(\mu)}(x)$, $g^{(\mu)}(x)$, $P_l^{(\mu)}(x)$, $G_l^{(\mu)}(x)$ le derivate μ^{ime} rispetto ad x di $f(x)$, $g(x)$, $P_l(x)$, $G_l\left(\frac{1}{x - a_l}\right)$, si ha che la derivata μ^{ima} di $f(x)$ è rappresentata in tutto il piano da

$$f^{(\mu)}(x) = g^{(\mu)}(x) + G_0^{(\mu)}\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_{l=1}^{\infty} \left[G_l^{(\mu)}\left(\frac{1}{x - a_l}\right) - P_l^{(\mu)}(x)\right]$$

e dentro al cerchio C_k da

$$f^{(\mu)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f(z)}{(z - x)^{\mu+1}} dz + \sum_{C_k} G_l^{(\mu)}\left(\frac{1}{x - a_l}\right).$$

Applicando poscia alla $f^{(\mu)}(x)$ lo stesso procedimento usato per la $f(x)$, si deduce:

$$\begin{aligned} g^{(\mu)}(x) &= \lim_{k=\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f(z)}{(z - x)^{\mu+1}} dz + \sum_{l=1}^{n_k} P_l^{(\mu)}(x)\right] \\ &= \lim_{k=\infty} \frac{d^\mu}{dx^\mu} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \sum_{l=0}^{n_k} (\sigma_{\nu+1,l} + A_{l,\nu})\right] \end{aligned}$$

e di qui

$$\frac{g^{(\nu)}(0)}{\mu!}=\sum_{i=0}^{\infty}(\sigma_{\nu+1,i}+A_{i,\nu}),$$

per cui la (5) resta pienamente dimostrata.

Dalla (5) si ricava che la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sigma_{\nu+1,i},$$

cioè la somma dei residui della funzione $\frac{f(z)}{z^{\nu+1}}$ relativi al punto zero ed ai punti a_i a distanza finita, è convergente quando $\nu \geqq m$; e però il minimo valore di m non può essere inferiore al minimo valore di ν, per cui la serie dei residui della funzione $\frac{f(z)}{z^{\nu+1}}$ è convergente; cioè non possono esistere polinomi P_i, di grado costante $m-1$, tali che m sia inferiore al detto valore minimo di ν.

5. Ciò posto, partendo dalla forma (2) di rappresentare la $f(x)$, che si può scrivere:

$$(2') \qquad f(x)=\lim_{k=\infty}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}x^{\nu}\sum_{l=0}^{\infty}\sigma_{\nu+1,l}+\sum_{C_k}G_l\left(\frac{1}{x-a_l}\right)\right]$$

od ancora

$$(2'') \quad f(x)=\lim_{k=\infty}\left\{\sum_{l=0}^{m_k}\left[G_l\left(\frac{1}{x-a_l}\right)+\sum_{\nu=0}^{m-1}\sigma_{\nu+1,l}x^{\nu}\right]+\sum_{\nu=m}^{\infty}x^{\nu}\sum_{l=0}^{m_k}\sigma_{\nu+1,l}\right\},$$

e notando che, se $f(x)$ ammette uno sviluppo d'ordine m, il limite

$$\lim_{k=\infty}\sum_{\nu=m}^{\infty}x^{\nu}\sum_{l=0}^{m_k}\sigma_{\nu+1,l}$$

esiste in virtù della (5), ed è una funzione intera di x, si conclude per la $f(x)$ il seguente sviluppo:

$$(6) \quad f(x)=\sum_{\nu=m}^{\infty}x^{\nu}\sum_{l=0}^{\infty}\sigma_{\nu+1,l}+\sum_{l=0}^{\infty}\left[G_l\left(\frac{1}{x-a_l}\right)+\sum_{\nu=0}^{m-1}\sigma_{\nu+1,l}x^{\nu}\right],$$

che è un particolare sviluppo d'ordine m.

Dunque: *Se una funzione uniforme $f(x)$ ammette uno sviluppo d'ordine m, caratterizzato dai polinomi P_l, essa ammetterà anche lo sviluppo* (6).

Tale sviluppo lo diremo *principale,* in quanto che, se la funzione non ha lo sviluppo principale (6), non può ammettere certamente altri sviluppi d'ordine finito.

Perciò le condizioni necessarie e sufficienti, alle quali deve soddisfare una funzione uniforme, dotata di singolarità isolate, affinchè di essa esista uno sviluppo d'ordine finito, si riducono alle condizioni di convergenza dello sviluppo (6).

Quindi, tenendo presente la formola (2''), si ricava che *una funzione uniforme $f(x)$ dotata di singolarità isolate, ammette uno sviluppo in serie d'ordine finito m allora e solo allora quando la serie*

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} x^{\nu} \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{\nu+1,l}$$

converge in tutto il piano uniformemente.

6. Passiamo a dimostrare il seguente teorema:

Se una funzione $f(x)$, uniforme, con singolarità isolate, è tale che esiste un numero finito r per cui

$$\left|\frac{f(x)}{x^{r+1}}\right|$$

si mantiene inferiore ad un numero finito M, quando x si muove sulle circonferenze C_k, la funzione $f(x)$ ammette lo sviluppo principale d'ordine $r+1$.

Invero, l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{f(z)}{z-x}\,dz$$

dentro al cerchio C_k si sviluppa in serie di potenze di x, la quale, arrestata alla potenza x^{r+1}, dà:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta-x}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta-\frac{x}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta+\dots$$
$$\dots+\frac{x^r}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{r+1}}d\zeta+\frac{x^{r+1}}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{r+2}}(1+\varepsilon_{r+1})d\zeta,$$

ove ε_{r+1} è una quantità dipendente da x, ζ, r, tale però che, fissato x comunque, e qualunque sia r, pei valori di ζ di modulo superiore ad un certo $N>0$, convenientemente scelto, è $\varepsilon_{r+1}<\varepsilon$ (ε essendo un numero positivo dato a priori). Quindi, considerando le circonferenze C_k di raggio maggiore di N, si ha

$$\left|\frac{x^{r+1}}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{r+2}}(1+\varepsilon_{r+1})d\zeta\right|<\frac{x^{r+1}}{2\pi}\int_{C_k}\frac{M}{\zeta^2}(1+\varepsilon)ds=\frac{x^{r+1}}{R_k}M(1+\varepsilon);$$

ma per $k=\infty$, $\lim R_k=\infty$; dunque si ha

$$\lim_{k=\infty}\frac{x^{r+1}}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{r+2}}(1+\varepsilon_{r+1})d\zeta=0$$

qualunque sia x; val quanto dire che la serie

$$\sum_{\nu=r+1}^{\infty}x^\nu\sum_{l=0}^{m}\sigma_{\nu+1,l}$$

per $k=\infty$ ha per limite zero qualunque sia x; e però si ha

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sigma_{\nu+1,l}=0$$

quando $\nu=r+1,\ r+2,\ \dots$

Dalla (2''') ricaviamo dunque, ponendo $n=r+1$,

$$f(x)=\lim_{k=\infty}\sum_{l=0}^{m}\left[G_l\left(\frac{1}{x-a_l}\right)+\sum_{\nu=0}^{r}\sigma_{\nu+1,l}x^\nu\right]$$
$$=\sum_{\nu=0}^{r}\sigma_{\nu+1,0}x^\nu+G_0\left(\frac{1}{x}\right)+\sum_{l=1}^{\infty}\left[G_l\left(\frac{1}{x-a_l}\right)+\sum_{\nu=0}^{r}\sigma_{\nu+1,l}x^\nu\right],$$

che è lo sviluppo principale d'ordine $r+1$.

7. Applicheremo le considerazioni svolte ad un esempio.

La funzione $\cot x$ ha per poli semplici, coi residui eguali all'unità, i punti

$$\pm l\pi. \qquad (l=0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Nell'intorno dell'origine ha lo sviluppo:

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{4 B_2 x^2}{1.2} + \frac{4^2 B_4 x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

in cui B_2, B_4, ... sono i numeri di Bernoulli (*).

La somma dei residui della funzione

$$\frac{\cot x}{x}$$

non è convergente, dunque (n° 4) il minimo valore di m non può essere inferiore ad 1; ma m può scegliersi eguale ad 1, perchè si può dimostrare che, posto

$$R_k = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$|\cot x|$ resta sul contorno C_k minore d'un numero fisso M, comunque grande sia k (**).

La funzione $\cot x$ ha dunque lo sviluppo principale di 1° ordine, che, in questo caso coincide con quello di Hermite:

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum\left(\frac{1}{x - l\pi} + \frac{1}{l\pi}\right).$$

Per questa via si ha il vantaggio di aver determinato la funzione intera, che resta incognita con quel metodo, e che si riduce alla costante zero.

(*) Cfr. Cesàro, Analisi algebrica, pag. 282.

(**) Picard, Traité d'Analyse, t. II, p. 165.

La considerazione che la serie dei residui della funzione

$$\frac{\cot x}{x^{2\mu}}$$

è nulla, porta alle note relazioni (*):

$$s_{2\mu} = (-1)^{\mu-1} \frac{2^{2\mu-1} B_{2\mu} \pi^{2\mu}}{(2\mu)!},$$

ove

$$s_{2\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\mu}}.$$

8. Faremo ancora qualche osservazione.

Quando una funzione $f(x)$ ammette uno sviluppo d'ordine finito m, caratterizzato da certi polinomi $P_l(x)$ di grado $m-1$ in x, nel qual caso essa ammetterà anche lo sviluppo (6), è evidente che nel fare la derivata m^{ima} di $f(x)$, i polinomi P_l spariscono; sicchè la serie formata colle derivate m^{ime} delle caratteristiche di $f(x)$ è convergente uniformemente in tutto il piano, e si ha

$$f^{(m)}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} G_l^{(m)}\left(\frac{1}{x-a_l}\right).$$

Di qui concludiamo subito, immaginando trasportata al primo membro la quantità $G_0^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right)$ corrispondente al valore zero dell'indice, e ponendo $x=0$, che è convergente la serie

$$\sum_{l=1}^{\infty} G_l^{(m)}\left(\frac{1}{-a_l}\right).$$

Analoghe conclusioni si hanno facendo le derivate di ordine

(*) Cesàro, l. c. pag. 481.

superiore ad m; dunque le serie

$$\sum_{l=1}^{\infty} G_l^{(\nu)}\left(\frac{1}{-a_l}\right) \qquad (\nu \geqq m) \tag{7}$$

sono convergenti.

Or si può vedere facilmente che la serie (7), per ogni dato $\nu \geqq m$, è la somma dei residui relativi ai punti a_l, esclusa l'origine a_0, della funzione

$$\frac{f(z)}{z^{\nu+1}},$$

a meno d'un fattor numerico finito.

Avevamo appunto osservato alla fine del n° 3 che tali serie per $\nu \geqq m$ sono convergenti.

Suppongasi che le singolarità della funzione $f(x)$ siano singolarità polari di prim'ordine, sicchè si abbia:

$$G_l\left(\frac{1}{x-a_l}\right) = \frac{R_l}{x-a_l}.$$

In tal caso le serie (7) sono, a meno d'un fattore numerico,

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{R_l}{a_l^{\nu+1}}. \qquad (\nu \geqq m)$$

Tali serie adunque debbono esser convergenti, se la funzione deve avere uno sviluppo d'ordine finito m. Se poi si fa l'ipotesi che sia convergente la serie

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left|\frac{R_l}{a_l^{\nu+1}}\right| \quad \text{per} \quad \nu = m,$$

allora, come ha dimostrato Hermite, la funzione ammette uno sviluppo d'ordine finito m; e precisamente, posto

$$P_l(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{x^\nu}{a_l^{\nu+1}},$$

si ha:

$$f(x) = g(x) - \sum_{i=1}^{\infty} k_i \left[\frac{1}{x - a_i} - P_i(x) \right].$$

Or bene questo sviluppo coincide collo sviluppo principale (1), poichè si trova facilmente

$$R_i P_i(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} s_{\nu+1} x^{\nu}.$$

Dunque, quando ad una funzione, dotata di singolarità polari di prim'ordine, è applicabile lo sviluppo di Hermite, la funzione intera che completa lo sviluppo è data [n° 5, (6)] da

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\infty} s_{\nu+\lambda}.$$

Palermo, 28 febbrajo 1897.

F. BUCCA.

SOPRA UNA TEORIA GEOMETRICA DELLE SINGOLARITÀ DI UNA CURVA ALGEBRICA PIANA.

Memoria di **Michele de Franchis**, in Palermo.

Adunanze del 28 febbrajo, 14 e 28 marzo 1897.

Introduzione.

La teoria dei punti singolari delle curve algebriche, con metodi analitici, può dirsi completa dopo le importanti ricerche del Puiseux, del de la Gournerie, del Cayley, e specialmente dopo quelle che vi consacrarono l'Halphen, lo Smith, lo Zeuthen ed il Noether.

Il fondamento di queste teorie dei punti singolari è la definizione di ciclo.

Un teorema del sig. Noether dà luogo ad una definizione geometrica delle singolarità delle curve piane algebriche; in essa il punto singolare appare come la riunione, in senso preciso, di diversi punti singolari ordinarii, coll'eventuale aggiunta di punti di diramazione (*). Il teorema del Noether, dal quale deriva la defini-

(*) Di una definizione analoga, per le singolarità delle superficie algebriche, s'è recentemente occupato il prof. Segre in un'importante Memoria dal titolo: *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche* (Ann. di Matem., t. XXV_2, 1896).

zione anzidetta, è il seguente: *Si può, con un numero finito di trasformazioni quadratiche del piano, trasformare una curva dotata di punti multipli qualunque in una curva dotata di soli punti multipli ordinari:* la definizione (nel senso di Noether) di una data singolarità risulta allora dallo studio dell'effetto delle diverse trasformazioni quadratiche impiegate a risolverla.

Un altro teorema di uguale importanza, che è dovuto pure al Noether, riguarda la possibilità di riferire, con una trasformazione birazionale, una curva algebrica dotata di singolarità qualunque ad una curva dotata di soli punti doppi ordinari.

Si sa che, data del ciclo una definizione qualsiasi, si può dimostrare, che, per mezzo di una qualunque trasformazione birazionale della curva cui il ciclo appartiene, ad esso corrisponde un ciclo della curva trasformata.

Viceversa però si capisce come, partendo da trasformazioni birazionali della curva, si può definire geometricamente un ciclo, in virtù di uno qualunque dei due sopradetti teoremi del sig. Noether (*).

In questa Memoria mi propongo la trattazione geometrica sistematica delle singolarità delle curve algebriche piane. Per fare ciò, partirò da una definizione del ciclo che ho già esposto nella Memoria: *Sulla curva luogo dei contatti d'ordine k delle curve d'un fascio colle curve d'un sistema lineare* ∞^k (Memoria II^a) (Questi Rendiconti, t. XI, 1897) § 4, n° 30.

Supporrò che il lettore conosca la teoria delle curve algebriche dotate di singolarità ordinarie, delle trasformazioni quadratiche del piano, le generalità sulle trasformazioni Cremoniane del piano e le trasformazioni birazionali d'una curva, e le generalità sui sistemi lineari di curve piane.

Supporrò inoltre noto il primo dei su accennati teoremi del sig. Noether (**).

(*) Vedi, p. e., la nota del sig. Del Pezzo: *Intorno ai punti singolari delle curve algebriche* (Rendiconti della R. Accademia di Napoli, 1893).

(**) Vedi p. e. (per la dimostrazione puramente geometrica): Bertini, *Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche.* (Rend. del R. Isti-

diremo che nel punto P e sul ramo R la serie g_v^k ha un punto ordinario, altrimenti diremo che *nel punto P e sul ramo R la serie g_v^k ha una singolarità* $[\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k]$ $(0 \leqq \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_k \leqq v)$.

Se con una trasformazione Cremoniana del piano della curva C (o, più in generale, con una trasformazione birazionale della curva), si passa da essa ad una curva C', ad una serie lineare g_v^k su C corrisponde una serie $g_v'^k$ su C'. Se R è un ramo di C coll'origine in P e non avente contatti ivi con altri rami di C, e ad esso corrisponde in C' un ramo R' coll'origine in P' e non avente ivi contatto con altri rami di C', allora, se la serie lineare g_v^k ha in P e sul ramo R la singolarità $[\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k]$, la corrispondente $g_v'^k$ ha in P' sul ramo R' la singolarità $[\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k]$; qualora noi, però, consideriamo in ogni gruppo della serie trasformata il punto P' sul ramo R', contato σ_0 volte.

2. Sia C una curva piana e P un punto (r)-plo qualunque di essa. Assoggettiamo il piano π, nel quale trovasi C, ad una trasformazione Cremoniana tale che al punto P di C corrispondano punti semplici della curva trasformata C_1 (*). Indichiamo con $P_1', P_1'', \ldots, P_1^{(s)}$ tali punti di C_1, allora i punti di C infinitamente vicini a P si distribuiscono in tanti *cicli*, in ognuno dei quali trovansi i punti di C infinitamente vicini a P che hanno per corrispondenti su C_1 punti infinitamente vicini ad un punto $P_1^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Se invece d'adoperare la suddetta trasformazione, che chiameremo T_1, ne avessimo adoperata un'altra T_2 che, come quella, facesse corrispondere alla curva C una curva C_2 ed al punto P di C punti semplici $P_2', P_2'', \ldots, P_2^{(s)}$ di C_2, allora, in virtù della trasformazione $T_1^{-1} T_2$, si sarebbe trasformata la C_1 in C_2. Ad ogni ramo uscente da un punto $P_1^{(i)}$ di C_1 corrisponde-

(*) Vedi Noether: *Ueber die algebraischen Functionen einer und zweier Variabeln.* Note 2 (Götting. Nach., 1871); *Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve* (Math. Ann., t. IX); *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen* (Math. Ann., t. XXIII), e Bertini: *Sopra alcuni teoremi fondamentali*, etc., etc., loc. cit.

rebbe un ramo uscente da un ben determinato punto $P_2^{(i)}$ di C_2. Si vede così che $t = s$ e che i punti di C infinitamente vicini a P, cui corrispondevano su C_1 punti infinitamente vicini a $P_1^{(i)}$, hanno per corrispondenti su C_2 punti infinitamente vicini a $P_2^{(i)}$, e viceversa. Resta perciò completamente giustificata la definizione seguente:

Se C è una curva piana e P un suo punto qualunque, se inoltre, con una certa trasformazione Cremoniana del piano di C, a questa si fa corrispondere una curva C_1, in modo tale che al punto P di C corrispondano punti semplici P_1', P_1'', ..., $P_1^{(s)}$ di C_1, si dice ciclo di C coll'origine in P l'insieme dei punti di C infinitamente vicini a P cui corrispondono punti di C_1 infinitamente vicini ad uno stesso punto $P_1^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

In particolare, p. e., è un ciclo ogni ramo uscente da un punto (r)-plo ordinario di $C (r \geqq 1)$.

Delle semplici osservazioni, analoghe alle precedenti, bastano per conchiudere che:

Applicando ad una curva data C una trasformazione birazionale qualsivoglia, ad un ciclo qualunque di C corrisponde un ciclo della trasformata.

3. Sia C una curva algebrica e supponiamo che g_ν^k sia una serie di gruppi di punti su di essa. Sia X un ciclo di C avente l'origine in un punto P. Siano C_1 e C_2 due curve corrispondenti birazionalmente alla C, e tali che al ciclo X di C corrispondano su di esse rami semplici coll'origine in punti semplici P_1, P_2. Siano $g_\nu'^k$, $g_\nu''^k$ le serie lineari corrispondenti alla g_ν^k. Supponiamo pel momento che non tutti i gruppi della g_ν^k contengano il punto P. Allora le serie $g_\nu'^k$, $g_\nu''^k$ non hanno punti fissi nei punti P_1, P_2. Le curve C_1, C_2 si corrispondono birazionalmente. Quindi la singolarità $[0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k]$ che la $g_\nu'^k$ ha in P_1 (n° 1) è la stessa singolarità che la $g_\nu''^k$ ha in P_2. In virtù di questa osservazione, noi diremo *che la g_ν^k ha in P e sul ciclo X la singolarità* $[0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k]$.

4. Sia in un piano: C una curva algebrica dotata in P d'una certa singolarità. Sia K un'altra curva del piano, passante comunque per P. Associamo alla curva K una curva K' dello stesso ordine

di K, ma non passante per P. La curva K insieme alla K' individuano un fascio di curve (K). Questo fascio di curve seca sulla curva C una certa serie lineare g_ν^1 che non ha in P punti fissi. Sia X_1 uno dei cicli di C aventi l'origine in P. La serie g_ν^1 avrà in tal punto e sul ciclo X_1 una certa singolarità $[0, \sigma_1]$ (n° 3). Si dimostra facilmente che *il numero σ_1 non dipende dalla scelta di K', ma dipende semplicemente dalla curva data K.* Basta eseguire sul piano delle curve C, K una trasformazione Cremoniana che faccia corrispondere alle curve C e K due curve C_1, K_1, e tale che al ciclo X_1 di C faccia corrispondere un ramo semplice di C_1, coll'origine in un punto semplice P_1. Supponiamo che questo non sia punto fondamentale del piano trasformato (il che, com'è noto, si può sempre fare). Il fascio di curve (K) individuato dalle curve K, K' vien trasformato in un fascio (K_1) che contiene una curva K'_1 corrispondente alla K. La curva K'_1 è costituita dalla curva K_1 e dalle parti di certe curve fondamentali, contate un certo numero di volte. Il numero σ_1 non è altro che il numero d'intersezioni, riunite in P_1, delle curve C_1, K'_1. Similmente il fascio di curve individuato dalla curva K e da un'altra curva diversa dalla K', non passante per P, ed avente l'ordine di K, viene trasformato in un determinato fascio che contiene una curva, K'_2, corrispondente alla K. Le curve K'_2, K'_1 possono differire, nel senso che l'una può contenere parti di curve fondamentali diverse di quelle della seconda, ma è chiaro che le parti della curva fondamentale corrispondente al punto P, fanno parte, contate lo stesso numero di volte, delle curve K'_2, K'_1. Denotando adunque con Φ l'insieme delle parti della curva fondamentale corrispondente al punto P, contate tante volte, quante volte entrano in K'_2, K'_1, si ha che il numero delle intersezioni che la curva C_1 ha riunite in P_1 tanto con K'_2 che con K'_1, coincide col numero delle intersezioni che la C_1 ha ivi riunite colla curva composta ΦK_1. Quindi la proposizione enunciata è completamente dimostrata. In virtù di essa si può enunciare la seguente

Definizione: *Date in un piano due curve diverse C, K passanti comunque per uno stesso punto P, se X_1 è un ciclo di C avente l'origine in P, si dice che X_1 ha $\sigma_1 (> 0)$ intersezioni colla curva K, quando sul ciclo X_1 ha la singolarità* $[0, \sigma_1]$ (n° 3) *la serie lineare*

secata su C da un fascio di curve dell'ordine di K, contenente la K e non avente in P punto base.

Aggiungiamo a questa definizione che, *qualora la K non passasse per P, diremmo che essa ha zero intersezioni col ciclo X_1.*

Ricordando la definizione di ciclo (n° 2), la definizione precedente coincide con questa:

Il numero σ_1 delle intersezioni del ciclo X_1 colla curva K non è altro che il numero di punti infinitamente vicini a P ed appartenenti al ciclo X_1, che sono contenuti da una curva qualsiasi, non passante per P, che tenda indefinitamente alla K.

Ora, come si sa, si definisce il numero σ delle intersezioni di una curva C con una curva K, riunite in un punto P, come il numero dei punti, infinitamente vicini a P, che la C ha in comune con una curva K' non passante per P e tendente indefinitamente alla K. In virtù della definizione precedente si ha quindi la seguente proposizione:

Il numero delle intersezioni, che due curve C e K, poste in uno stesso piano, hanno riunite in un punto P, è uguale alla somma dei numeri delle intersezioni che i vari cicli di C, aventi l'origine in P, hanno colla curva K.

5. Nel n° 3 definimmo la singolarità del tipo $[0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k]$ che una g_ν^k sopra C ha in un punto P sopra un ciclo X. Se $[\Gamma]^k$ è un sistema lineare di curve che seca la g_ν^k su C, e se la curva generica di $[\Gamma]^k$ non passa per P, è chiaro (n^i 3 e 4) che σ_1 è il numero d'intersezioni che la curva generica di un determinato sistema lineare ∞^{k-1}, $[\Gamma]^{k-1}$, contenuto in $[\Gamma]^k$, ha col ciclo X; σ_2 è il numero d'intersezioni che la curva generica di un determinato sistema lineare ∞^{k-2}, $[\Gamma]^{k-2}$, contenuto in $[\Gamma]^{k-1}$, ha col ciclo X $(\sigma_2 > \sigma_1)$; etc., etc. Ma si conviene che al gruppo generico della g_ν^k possa aggiungersi il punto P, considerato come origine di X, contato $\lambda_0 (\geq 0)$ volte. Ed allora si ottiene in P e sul ciclo X una singolarità $[\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k]$ della serie $g_{\nu+\lambda_0}^k$ così ottenuta, ove $\lambda_i = \lambda_0 + \sigma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Similmente potrebbe un sistema

lineare di curve $[\Gamma]^k$ secare su C una serie lineare $g^k_{\nu+\lambda_0}$, e potrebbe la curva generica di esso avere λ_0 intersezioni col ciclo X. Allora si direbbe che $[\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k]$ è la singolarità che in P e sul ciclo X ha la serie $g^k_{\nu+\lambda_0}$ $(\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k)$, quando λ_i fosse il numero delle intersezioni che la curva generica di un determinato sistema lineare ∞^{k-i}, $[\Gamma]^{k-i}$, contenuto nel dato, ha riunite col ciclo X. Ma potremmo escludere da ogni gruppo della $g^k_{\nu+\lambda_0}$ il punto P sul ciclo X, contato λ'_0 $(\leq \lambda_0)$ volte, e si otterrebbe una serie lineare $g^k_{\nu+\lambda_0-\lambda'_0}$ *dotata* (per definizione) *in P e sul ciclo X della singolarità* $[\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k]$, ove $\sigma_i = \lambda_i - \lambda'_0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$. Questa definizione di singolarità di una serie lineare in un punto e sopra un ciclo è alquanto più generale di quella data al n° 3, ove si suppone $\sigma_0 = 0$. Però, come allora, *se una g^k_ν ha in P e sopra un ciclo X la singolarità* $[\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k]$, *fatta una trasformazione birazionale della curva cui la g^k_ν appartiene, la serie g'^k_ν corrispondente ha in P' e sul ciclo X' (trasformati di P e di X) la stessa singolarità* (n^i 1 e 2); qualora noi però consideriamo, nel gruppo generico della serie trasformata, il punto P' sul ciclo X', contato σ_0 volte. Un punto P sopra un ciclo X si dice *punto (s)-plo della g^k_ν*, quando esso (considerato su X) conti s volte fra i ν punti di un certo gruppo della g^k_ν.

6. In quanto alla definizione del genere di una curva irreduttibile, C, si sa che si può procedere così: cominciare col definire il genere di una curva d'ordine n, dotata di soli punti multipli ordinari, come la differenza $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{r(r-1)}{2}$, ove la $\sum \frac{r(r-1)}{2}$ è estesa a tutti i punti multipli [(r)-pli] che la curva possiede. Come si sa, questa differenza è positiva o nulla.

Ed allora si può dimostrare sinteticamente che *due curve in corrispondenza algebrica biunivoca e dotate di soli punti multipli ordinari sono dello stesso genere*. Le dimostrazioni che fin qui si sono date di questo teorema, partendo da tale definizione di genere, sono piuttosto complicate. Si può, per esempio, seguire questo procedimento: si dimostra sinteticamente che, data su una curva C dell'ordine n,

dotata di soli punti multipli ordinari, una serie lineare g^1_ν, e posto $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{r(r-1)}{2}$, la g^1_ν ammette $2(\nu + p - 1)$ punti doppi (contando come $\sigma_0 + \sigma_1 - 1$ punti doppi ogni punto in cui la g^1_ν abbia, sopra un certo ramo, la singolarità $[\sigma_0, \sigma_1]$ (n° 1)) (*).

Se C' è una curva d'ordine n' dotata di soli punti multipli ordinari ed in corrispondenza algebrica biunivoca con C, la serie g'^1_ν su di essa, corrispondente alla g^1_ν, ammette come punti doppi i $2(\nu + p - 1)$ punti corrispondenti ai punti doppi della g^1_ν, e quei soli. Intanto, posto $p' = \frac{(n'-1)(n'-2)}{2} - \sum \frac{r'(r'-1)}{2}$, si ha che i punti doppi della g'^1_ν sono $2(\nu + p' - 1)$, quindi si ricava $p = p'$. Ed ora, data una curva C irreduttibile, per definire il genere di questa, la si trasforma birazionalmente in una curva C' dotata di singolarità ordinarie: *qualunque sia la trasformazione adoperata, la C' ha sempre uno stesso genere p che si dice genere di C* (**). È evidente che *due curve in corrispondenza algebrica biunivoca sono dello stesso genere* (Teorema di Riemann); ed inoltre che: *data su una curva irreduttibile del genere p una serie lineare g^1_ν, essa ha $2(\nu + p - 1)$ punti doppi, e se la g^1_ν ha in un punto P e su un determinato ciclo la singolarità $[\sigma_0, \sigma_1]$* (n° 5), *tal punto* (considerato come origine di quel ciclo) *conta come $\sigma_0 + \sigma_1 - 1$ punti doppi della g^1_ν* (Riemann).

Si generalizza facilmente questa proposizione e si hanno questi due teoremi suscettibili di una dimostrazione sintetica fondata sulle predette definizioni e su una semplice proprietà dei punti multipli delle serie lineari (***):

a) (Teorema di de Jonquières-Brill). *Data su una*

(*) Vedi, ad esempio, la mia Memoria: *Sulla curva luogo dei contatti*, etc., etc., loc. cit., ni 36 e 37 (Memoria II).

(**) Questa definizione di genere è quella che trovasi anche adottata nella Nota del sig. Bertini: *Sopra alcuni teoremi*, etc., etc., loc. cit.; giova osservare inoltre che il procedimento qui indicato è l'inverso di quello adottato dal sig. Segre nella sua *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Annali di Matematica, t. XXII, 1894).

(***) Vedi Segre: *Introduzione*, etc., etc., loc. cit., ni 42 e 43 e la mia Memoria: *Sulla curva luogo dei contatti*, etc., etc., loc. cit. (Memoria II), n° 38.

curva irreduttibile di genere p una serie lineare g^k_ν, essa ammette $(k+1)(\nu+kp-k)$ punti $(k+1)$-pli (n° 5).

b) (Teorema di Segre). *Se la serie g^k_ν su C ha in un punto P e sopra un ciclo X la singolarità $[\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k]$, il punto P sul ciclo X conta come $\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_k - \dfrac{k(k+1)}{2}$ punti $(k+1)$-pli della g^k_ν.*

7. Sia C una curva algebrica piana, irreduttibile, dell'ordine $n(>1)$ e del genere p (n° 6). Sia P un suo punto ed X un suo ciclo, coll'origine in P. La rete delle rette del piano seca su C una serie g^2_n. Questa serie avrà in P e sul ciclo X (n° 3) una certa singolarità $[0, \sigma_1, \sigma_2]$ $(0 < \sigma_1 < \sigma_2)$. Il numero σ_1 (n° 5) è il numero d'intersezioni che il ciclo X ha con una retta generica passante per P. Il numero $\sigma_2(>\sigma_1)$ è il numero d'intersezioni che il ciclo X ha con *un'unica* retta (n° 5) uscente da P. Questa retta si dice *tangente* al ciclo. Il numero σ_1 dicesi *ordine* del ciclo, il numero $\sigma_2 - \sigma_1 (\geq 1)$ dicesi *classe* del ciclo.

L'ordine σ_1 del ciclo non è dunque altro che il numero d'intersezioni che il ciclo ha con una retta generica passante per l'origine; tra le rette passanti per l'origine ve n'è una, ed una sola, che ha $\sigma_2(>\sigma_1)$ intersezioni col ciclo, e dicesi tangente al ciclo. La classe del ciclo è il numero $\sigma_2 - \sigma_1 (\geq 1)$ (*).

Un ciclo d'ordine λ e classe μ verrà denotato col simbolo (λ, μ). Il numero $\lambda + \mu$ è il numero d'intersezioni del ciclo colla sua tangente. Ad esempio: un punto generico della curva è origine di un ciclo $(1, 1)$ (ramo semplice di prima classe).

Supponiamo che la curva C possieda in P un punto (r)-plo e siano $X_1, X_2, \ldots, X_s$ i cicli di C coll'origine in P. Siano $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$ gli ordini di questi cicli. Una retta qualunque uscente da P, che non sia tangente ad un ciclo X_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$, ha in P (n° 4) $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_s$ intersezioni riunite colla curva: una retta tangente a $t (1 \leq t \leq s)$ di tali cicli X_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ ha in P

(*) Halphen: *Étude sur les points singuliers* (Appendice alla traduzione francese del trattato sulle curve piane di Salmon).

$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_t + \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_t$ intersezioni colla curva C (ove $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t$ sono le classi di tali t cicli). Si vede quindi che $r = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_t$ e che la condizione necessaria e sufficiente affinchè una retta sia tangente in P alla curva C, è che essa sia tangente a qualcuno dei cicli di C aventi l'origine in P. Riepilogando:

La somma degli ordini dei cicli di C aventi l'origine in un punto P uguaglia la moltiplicità di tal punto per la curva C; le tangenti in P alla curva C sono le tangenti ai cicli di C uscenti da P.

8. Su una curva C irreduttibile del genere p e dell'ordine $n (> 1)$ la serie lineare g_n^1, secata su C da un fascio di rette avente il centro in un punto generico, Q, del piano, ha (n° 6) $2(n + p - 1)$ punti doppi. Sopra ogni ciclo (λ, μ) $(\lambda > 1)$ la serie g_n^1 ha la singolarità (n° 5) $[0, \lambda]$, quindi (n° 6) $\lambda - 1$ dei punti doppi della g_n^1 coincidono in esso. Ora i punti di contatto delle tangenti condotte da Q alla curva C sono i punti doppi della serie g_n^1, i quali (essendo Q punto generico) cadono in punti semplici di C, quindi la classe di C è

$$n' = 2(n + p - 1) - \Sigma(\lambda - 1), \tag{1}$$

ove la $\Sigma(\lambda - 1)$ è estesa a tutti i cicli di C il cui ordine è superiore all'unità.

Sia ora X un ciclo di C, avente l'origine in un punto P. Sia Q un punto della tangente al ciclo X, diverso da P. Allora la serie lineare g_n^1, secata su C dalle rette uscenti da Q, non ha più in P e sul ciclo X la singolarità $[0, \lambda]$, ma la singolarità $[0, \lambda + \mu]$ (n° 7); quindi in P e sul ciclo X coincidono (n° 6), invece che $\lambda - 1$, $\lambda + \mu - 1$ dei $2(n + p - 1)$ punti doppi della g_n^1. Quindi degli n' punti di contatto delle tangenti condotte da Q a C [ove n' è dato dalla (1)] μ coincidono in P sul ciclo X.

Ossia:

La classe di un ciclo X di una curva C, di classe data, è uguale al numero delle tangenti condotte alla curva C da un punto Q della

tangente al ciclo X, le quali vengono assorbite dalla tangente ad X, quando Q non sia l'origine di X (*).

Se Q è l'origine del ciclo X, la serie lineare g^1_n, secata su C dalle rette uscenti da Q, ha in Q e sul ciclo X la singolarità $[\lambda, \lambda+\mu]$ (n[i] 5 e 7), invece che la $[0, \lambda]$, quindi, dei $2(n+p-1)$ punti doppi della g^1_n, $2\lambda+\mu-1$ (invece che $\lambda-1$) coincidono in Q sul ciclo X; in altri termini, delle n' tangenti che da Q si possono condurre a C, $\lambda+\mu$ coincidono nella tangente ad X.

Ossia:

La somma della classe e dell'ordine di un ciclo, appartenente ad una curva di classe data, è uguale al numero delle tangenti, condotte alla curva dall'origine del ciclo, le quali vengono assorbite dalla tangente al ciclo (**).

Confrontando queste proprietà con quelle ricavate al n° 7, si vede che, se volessimo per le curve inviluppo stabilire una definizione di ciclo duale a quella delle curve luogo, il duale dell'ordine sarebbe la classe, e viceversa; ed all'origine corrisponderebbe dualmente la tangente al ciclo. Di dimostrazione immediata sono i due teoremi:

1°) *Con una collineazione, ad un ciclo* (λ, μ) *corrisponde un ciclo* (λ, μ): *all'origine ed alla tangente del primo corrispondono l'origine e la tangente del secondo.*

2° *La curva (luogo) C' correlativa ad una curva (luogo) C ha i suoi cicli* (μ, λ) *corrispondenti ai cicli* (λ, μ) *di* C: *all'origine ed alla tangente d'un ciclo di C corrispondono rispettivamente la tangente e l'origine del ciclo corrispondente su C', e viceversa* (***).

(*) Halphen, loc. cit.
(**) Halphen, loc. cit.
(***) Halphen, loc. cit.

§ 2.

Effetto di una trasformazione quadratica sulle singolarità di una curva. — Abbassamento nel genere prodotto da una singolarità. — Combinazioni caratteristiche.

9. Siano, nel piano π, C e K due curve passanti comunque per uno stesso punto P. Sia X un ciclo di C uscente da P, e siano i le intersezioni che tal ciclo ha colla curva K (n° 4). Sia (K) un fascio di curve dell'ordine di K, non avente in P punto base, e contenente la curva K. Supponiamo che il fascio (K) sechi la curva C secondo una serie lineare g_{ν}^{1} (n° 1). Applichiamo al piano π una trasformazione quadratica e supponiamo che P sia un punto fondamentale, che le due rette fondamentali uscenti da P siano distinte e che nessuna di esse sia la tangente al ciclo X. Supponiamo inoltre, per semplicità, che gli altri due punti fondamentali siano a distanza finita da P (*). Denoteremo con π_1 il piano trasformato di π, con C_1, K_1 le curve (prive di rette fondamentali) corrispondenti alle curve C, K, con p_1 la retta fondamentale corrispondente al punto P, con (K_1) il fascio di curve corrispondente al fascio (K). Il fascio (K_1) contiene una curva [corrispondente alla curva K di (K)], la quale si scinde nella curva K_1 e nella retta p_1 contata r volte, ove r è la moltiplicità in P della curva K.

Le intersezioni del ciclo X con K sono tante quante le intersezioni che il ciclo X_1 trasformato di X ha colla curva composta $p_1^r K_1$ (n° 4). Se, in particolare, K fosse una retta del piano π, passante per P e diversa dalla tangente al ciclo X, le sue intersezioni col ciclo X sarebbero tante quante le intersezioni che il ciclo X_1 ha colla curva composta $p_1 K_1$, ove K_1 sarebbe una retta del piano π_1

(*) In ogni caso, uno almeno di tali punti è a distanza finita da P, perchè le rette fondamentali uscenti da P sono, per ipotesi, distinte; noi manterremo anche nel seguito tali restrizioni, benchè talvolta siano superflue, sacrificando la maggiore generalità (che, per lo scopo prefissoci, non avrebbe importanza) alla semplicità ed all'uniformità.

non passante per l'origine del ciclo X_1. Quindi le intersezioni che il ciclo X_1 ha colla retta p_1 sono tante quant'è l'ordine (n° 7) del ciclo X. [Similmente vedrebbesi facilmente che la classe di X (n° 7) è uguale al numero delle intersezioni che il ciclo X_1 ha con la retta del piano π_1, la quale congiunge l'origine del ciclo X_1 col punto fondamentale del piano π_1, opposto alla retta p_1]. Dunque:

Indicando con λ l'ordine del ciclo X, il numero delle intersezioni che esso ha con una curva K, passante per l'origine del ciclo ed avente ivi un punto (r)-plo $(r \geq 1)$, è uguale al numero $r\lambda + i_1$, ove $i_1\,(\geq 0)$ è il numero delle intersezioni che la curva K_1, trasformata di K mediante la data trasformazione quadratica, ha col ciclo X_1 trasformato di X.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $i_1 = 0$ è che la tangente al ciclo X non sia tangente in P alla curva K.

Quando la tangente al ciclo X è tangente in P alla curva K, allora $i_1 > 0$ ed il numero i_1 si dice ordine di contatto del ciclo X colla curva K.

Supponiamo che nessuna delle due rette fondamentali del piano π, uscenti da P, sia tangente in P alla curva C. Denotiamo con $X, X', X'', \ldots, X^{(s)}$ i varii cicli di C uscenti da P, con $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(s)}$ i loro ordini, con σ la moltiplicità in P della curva C. Si ha intanto (n° 7):

$$\sigma = \lambda + \lambda' + \lambda'' + \ldots + \lambda^{(s)}.$$

Indicando con j il numero delle intersezioni riunite in P delle curve C e K e con $i, i', i'', \ldots, i^{(s)}$ le intersezioni di K coi cicli $X, X', \ldots, X^{(s)}$, si ha (n° 4):

$$j = i + i' + i'' + \ldots + i^{(s)}.$$

Denotiamo con $X_1, X_1', \ldots, X_1^{(s)}$ i cicli trasformati di $X, X', \ldots, X^{(s)}$ e con $i_1, i_1', \ldots, i_1^{(s)}$ le loro intersezioni colla curva K_1. Si ha, indicando con r il grado di moltiplicità del punto

P per la curva K $(r \geqq 1)$,

$$i = \lambda r + i_1$$
$$i' = \lambda' r + i'_1$$
$$i'' = \lambda'' r + i''_1$$
$$\cdots\cdots$$
$$i^{(s)} = \lambda^{(s)} r + i_1^{(s)}$$

e sommando,

$$j = \sigma r + i_1 + i'_1 + \ldots + i_1^{(s)}.$$

Se le curve C e K non avessero in P tangenti in comune, sarebbe $i_1 = i'_1 = i''_1 = \ldots = i_1^{(s)} = 0$ e perciò $j = \sigma r$.

Donde:

Date nel piano π due curve C e K aventi in uno stesso punto P punti multipli rispettivamente dei gradi σ, r $(\sigma \geqq 1,\ r \geqq 1)$, operando sul piano π una trasformazione quadratica in cui un punto fondamentale sia P e gli altri due siano fuori delle tangenti in P alla curva C, a distanza finita tra loro e da P; denotando con C_1 e K_1 le curve corrispondenti a C ed a K (private, s'intende, delle rette fondamentali); *le intersezioni che le curve C e K hanno in P si ottengono sommando al numero $r\sigma$ delle intersezioni che esse avrebbero, se non avessero in P alcuna tangente in comune, il numero delle intersezioni che le curve C_1 e K_1 hanno riunite nei punti di C_1 corrispondenti al punto P.*

Con simili considerazioni si dimostra che:

Date nel piano π due curve C e K passanti comunque per uno stesso punto P, applicando al piano π una trasformazione quadratica, in cui P non sia punto fondamentale nè giaccia sopra rette fondamentali, le curve C e K hanno in P riunite tante intersezioni quante ne hanno nel punto P_1, corrispondente a P, le curve trasformate C_1, K_1.

10. Nel n° 6 del § 1 abbiamo visto che, data su una curva C irreduttibile del genere p una serie lineare g_ν^1, questa ammette $\delta = 2(\nu + p - 1)$ punti doppi (n° 5), avendo però l'avvertenza di contare come equivalente a $\sigma_0 + \sigma_1 - 1$ punti doppi della g_ν^1 ogni

punto il quale, considerato come appartenente ad un ciclo (in particolare ramo semplice) di C, è un punto di singolarità $[\sigma_0, \sigma_1]$ (n° 5) per la serie g^1_ν. Dalla formola $\delta = 2(\nu + p - 1)$ si ricava $p = \frac{\delta}{2} - \nu + 1$, e questa dà il genere di C, qualora si conosca δ.

Sia (Γ) un fascio di curve d'ordine m, che sechi sulla curva C d'ordine n e genere p una serie lineare g^1_{mn}. Associamo alla curva C una curva C' dello stesso ordine la quale sechi la C in n^2 punti semplici e distinti, i quali siano punti ordinari (n° 1) per la g^1_{mn}.

Ciò, evidentemente, si può fare in infiniti modi. Pensiamo al fascio di curve (C) individuato da C e da C' ed alla curva $\Omega^1_{C\Gamma}$ luogo dei punti di contatto delle curve del fascio (C) con quelle del fascio (Γ). La curva $\Omega^1_{C\Gamma}$ passa con un ramo per ciascuno degli n^2 punti base del fascio (C) e non è ivi tangente alla curva C (*). Chiameremo con (b) l'insieme degli n^2 punti base di (C). Sia P un punto d'intersezione di C colla curva $\Omega^1_{C\Gamma}$, diverso dai punti (b). Se P è un punto semplice di C, affinchè $\Omega^1_{C\Gamma}$ passi ivi, è necessario che la serie g^1_{mn} abbia ivi una singolarità $[\sigma_0, \sigma_1]$ (n° 1), e precisamente (**) il numero i delle intersezioni di C e di $\Omega^1_{C\Gamma}$ assorbite in tal punto è $i = \sigma_0 + \sigma_1 - 1$. Se P è punto multiplo di C, X è uno dei cicli di C aventi l'origine in P, e la serie g^1_{mn} ha in P e su X la singolarità $[\sigma_0, \sigma_1]$ (n° 5), la curva $\Omega^1_{C\Gamma}$ devè avere in P *almeno* $\sigma_0 + \sigma_1 - 1$ intersezioni ivi col ciclo X; denotando con i il numero d'intersezioni che la curva $\Omega^1_{C\Gamma}$ ha in P colla curva C, porremo $\tau = i - \Sigma(\sigma_0 + \sigma_1 - 1)$, ove questa somma s'intende estesa a tutti i cicli di C uscenti da P. Quindi $\tau \geq 0$ (***). Il numero τ relativo ad un punto semplice di C è certamente nullo.

Il numero totale delle intersezioni che le curve $\Omega^1_{C\Gamma}$, C hanno fuori dei punti base del fascio (C) è dunque:

$$\Sigma(\sigma_0 + \sigma_1 - 1) + \Sigma\tau,$$

(*) Vedi la mia Memoria: *Sulla curva luogo dei contatti*, etc., etc., § 1, (Questi Rendiconti, t. X).

(**) Vedi: *Sulla curva luogo* etc., etc., Memoria II, n° 36 (Questi Rendiconti, t. XI).

(***) In seguito si vedrà che certamente $\tau > 0$, se P è un punto *multiplo*.

ove la $\Sigma(\sigma_0 + \sigma_1 - 1)$ s'intende estesa a tutti i cicli (in particolare rami semplici) di C, sui quali la g^1_{mn} abbia una singolarità $[\sigma_0, \sigma_1]$ (n° 5), e la $\Sigma\tau$ è estesa a tutti i punti multipli di C. Denotando con δ il numero $2(mn + p - 1)$ dei punti doppi della serie g^1_{mn} si ha, come si sa,

$$\delta = \Sigma(\sigma_0 + \sigma_1 - 1).$$

Intanto le curve C, $\Omega^1_{C\Gamma}$ sono rispettivamente degli ordini n, $2n + 2m - 3$, e passano semplicemente e senza toccarsi per ognuno degli n^2 punti base del fascio (C); quindi le loro intersezioni, fuori di tali punti, sono:

$$(1) \quad n(2n + 2m - 3) - n^2 = (n - 1)(n - 2) + 2(mn - 1).$$

Si ricava adunque

$$(2) \qquad \delta + \Sigma\tau = (n - 1)(n - 2) + 2(mn - 1).$$

Aggiungendo $2p$ ad ambo i membri e tenendo presente la relazione $\delta = 2(mn + p - 1)$, si ha

$$(3) \qquad p = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \sum \frac{\tau}{2},$$

ove le τ s'intendono calcolate in tutti i punti multipli di C.

In particolare, se P è un punto (r)-plo ordinario, il numero τ, calcolato in esso, è (*) $r(r - 1)$. Quindi, se la curva C ha tutti i punti multipli ordinari $[(r)$-pli$]$, si ritrova:

$$p = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) - \sum \frac{r(r - 1)}{2},$$

come del resto era da prevedersi.

Noi abbiamo supposto, per semplicità, che la curva C' incontrasse la C in n^2 punti semplici, che fossero punti ordinari per la

(*) Vedi: *Sulla curva luogo* etc., etc., Mem. II, n° 36 (loc. cit.).

[illegible]

e dalle scelte del [illegible] (T). [illegible]

è un intero positivo, quando in P la curva C abbia [illegible]

un punto multiplo (quando P è un punto semplice, abbiamo [illegible]

che $\frac{\tau}{2} = 0$).

Cominciamo dall'osservare che la cosa è vera quando il punto P è (r)-plo ordinario: allora, come abbiamo visto, [illegible]

Inoltre osserviamo che, quando sul piano della curva C si esegue una trasformazione quadratica, e P è un punto multiplo di C, [illegible]

il quale non sia fondamentale per la trasformazione, nè giaccia sopra rette fondamentali, il $\frac{\tau}{2}$, calcolato nel punto P per la curva C, è uguale al $\frac{\tau}{2}$ calcolato nel punto corrispondente P_1 per la curva C_1 trasformata di C, e ciò quando si consideri come curva C'_1 da associarsi alla C_1, appunto quella che corrisponde alla C' (*) e come fascio (Γ_1) il fascio corrispondente al fascio (Γ) (n[i] 5 e 9).

Ora sia P un punto multiplo di C e consideriamo il numero $\frac{\tau}{2}$ calcolato in esso. Applichiamo al piano di C una serie di trasformazioni quadratiche tali che il punto P ed i suoi corrispondenti non siano punti fondamentali nè si trovino su rette fondamentali; però facciamo le trasformazioni in modo da cadere su una curva C_1 la quale, oltre al punto P_1 corrispondente a P, non abbia altri punti multipli che punti multipli ordinari.

Allora il genere di C_1 ossia (n° 6) il genere di C è:

$$p = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) - \sum \frac{r(r-1)}{2} - \frac{\tau}{2},$$

ove ν è l'ordine di C_1 e la $\sum \frac{r(r-1)}{2}$ è estesa a tutti i punti multipli ordinari [(r)-pli] di C_1. Si vede adunque che

$$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) - p - \sum \frac{r(r-1)}{2},$$

e $\frac{\tau}{2}$ è quindi un numero intero dipendente soltanto dalla singolarità che la curva C_1 ha in P_1, ossia dalla singolarità che la curva C ha in P.

(*) S'intende però che in tal caso, in generale, alla curva C_1 bisognerà aggiungere le rette fondamentali contate ciascuna un numero conveniente di volte, perchè la C_1 divenga dell'ordine di C'_1, o viceversa. Ma è facile assicurarsi che, benchè così il fascio corrispondente a (C, C') contenga solo parzialmente la curva C_1 (cioè questa fa parte di una curva del fascio, ma non è una curva *totale* del fascio), ciò che diremo in seguito continua a sussistere.

Riepilogando:

Sia in un piano una curva C d'ordine n, irreduttibile, dotata in P d'un punto multiplo qualunque. Sia (Γ) *un fascio di curve d'ordine m, secante su C una serie lineare* g^1_{mn}; *sia inoltre C' una curva d'ordine n, diversa dalla C. Denotiamo con* $X_1, X_2, \ldots, X_s$ *i cicli di C uscenti da P* (n° 2), *con* $[\sigma'_0, \sigma'_1]$, $[\sigma''_0, \sigma''_1]$, ..., $[\sigma^{(s)}_0, \sigma^{(s)}_1]$ *le singolarità che la serie* g^1_{mn} *ha in P sui cicli* $X_1, X_2, \ldots, X_s$ (n° 5); *con* ρ *il numero delle intersezioni che le curve C, C' hanno riunite in P; con i il numero delle intersezioni che la curva C ha riunite in P colla curva* $\Omega^1_{C\Gamma}$, *luogo dei punti di contatto delle curve del fascio (C, C') con quelle del fascio* (Γ).

Posto

$$\tau = i - \rho - \sum_{h=1}^{s} [\sigma^{(h)}_0 + \sigma^{(h)}_1 - 1],$$

il numero τ *è un numero intero pari e positivo* (o nullo), *il quale non dipende che dalla singolarità che la curva C ha in P. Il genere di C è*

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \sum \frac{\tau}{2},$$

ove la $\sum \frac{\tau}{2}$ *è estesa a tutti i punti multipli di C.*

Il numero $\frac{\tau}{2}$, *calcolato in P, si dice abbassamento sul genere prodotto dalla singolarità che la curva C ha in P; in particolare, se P è un punto (r)-plo ordinario, si ha* $\frac{\tau}{2} = \frac{r(r-1)}{2}$ $(r \geqq 1)$.

Applicando al piano di C una trasformazione quadratica in cui P non sia punto fondamentale, nè giaccia su rette fondamentali, alla singolarità che la C ha in P corrisponde una singolarità che la curva corrispondente C_1 *ha nel punto corrispondente* P_1, *e gli abbassamenti sul genere, prodotti dalle singolarità che le curve* C, C_1 *hanno rispettivamente in P ed in* P_1, *sono uguali.*

11. Sia nel piano π una curva irreduttibile C, d'ordine n, e

dei punti di contatto delle curve del fascio (C_1, C_1'); essa è priva della retta fondamentale corrispondente al punto P, ed è la corrispondente alla curva Ω'_{CT}. Per le ipotesi fatte, la curva C_1' non passa per alcuno dei punti $P_1', P_1'', \ldots, P_1^{(s)}$. Denotiamo con $i_1, i_2, \ldots, i_s$ i numeri delle intersezioni che la curva C_1 ha riunite colla $\Omega'_{C_1\Gamma_1}$ nei punti $P_1', P_1'', \ldots, P_1^{(s)}$; con $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s$ i doppi degli abbassamenti sul genere prodotti dalle singolarità che la curva C_1 ha in $P_1', P_1'', \ldots, P_1^{(s)}$. Si ha intanto che le curve C, Ω'_{CT} passano per P con r, $2r-1$ rami rispettivamente, quindi (n° 9) il numero delle loro intersezioni riunite in P è:

$$(2)\qquad i = r(2r-1) + i_1 + i_2 + \ldots + i_s.$$

Inoltre si ha (n° 10):

$$(3)\qquad \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_s = i_1 + i_2 + \ldots + i_s - \Sigma(\sigma_1 - 1),$$

ove la $\Sigma(\sigma_1 - 1)$ ha lo stesso valore che in (1) (n° 3).

Tenendo conto della (1) si ha dunque:

$$\tau = r(r-1) + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_s.$$

Adunque:

Dato su una curva piana C un punto (r)-plo P qualunque, fatta una trasformazione quadratica del piano di C, nella quale un punto fondamentale sia P e gli altri due siano a distanza finita da P e fuori delle tangenti in P alla curva C; denotando con D l'abbassamento sul genere prodotto dalla singolarità che la curva C ha in P, e con $D_1, D_2, \ldots, D_s$ gli abbassamenti analoghi dovuti ai punti multipli corrispondenti a P della curva trasformata; si ha

$$D = \frac{r(r-1)}{2} + D_1 + D_2 + \ldots + D_s \text{ (*)}.$$

Osservazione. — Si vede adunque che, per un punto (r)-plo qualunque, $D \geq \dfrac{r(r-1)}{2}$.

(*) Noether: *Rationale Ausführung*, etc., loc. cit.; Bertini: *Sopra alcuni teoremi*, etc., loc. cit.

12. Siano in un piano π: P, A, B tre punti distinti, t una retta qualunque uscente da P, ma diversa da PA e da PB.

Operiamo sul piano π una trasformazione quadratica coi tre punti fondamentali in P, A, B. Siano: π' il piano trasformato, p', a', b' le rette fondamentali di π' corrispondenti ai punti P, A, B. Al punto P del piano π, considerato come appartenente alla retta t, corrisponde nel piano π' un punto allogato sulla retta p', e tal punto noi indicheremo con P_1. Indicheremo inoltre con t' la retta congiungente il punto P_1 col punto d'intersezione di a' e b', la qual retta, come si sa, corrisponde alla t.

Ora sia C una curva del piano π avente in P un ciclo X. Supponiamo che la tangente al ciclo X sia la retta t, e denotiamo con λ, μ l'ordine e la classe del ciclo (n° 7). Dopo la trasformazione quadratica, alla curva C di π corrisponderà una curva C_1 di π', ed il ciclo X verrà trasformato in un ciclo X_1 avente l'origine in P_1. Come abbiam visto (n° 9), il numero λ è il numero d'intersezioni che il ciclo X_1 ha colla retta p', ed il numero μ è il numero d'intersezioni che il ciclo X_1 ha colla retta t'. Ed ora denotiamo con λ_1, μ_1, t_1 l'ordine, la classe e la tangente del ciclo X_1.

Distinguiamo 3 casi:

1° $\lambda < \mu$.

Allora il ciclo X_1 ha colla retta p' un numero d'intersezioni minore del numero di quelle che esso ha colla retta t'. Quindi si trae come conseguenza (n° 7):

$$\lambda_1 = \lambda, \qquad \mu_1 = \mu - \lambda, \qquad t_1 \equiv t'.$$

2° $\lambda > \mu$.

Il ciclo X_1 ha in tal caso colla retta p' un numero d'intersezioni superiore al numero d'intersezioni che esso ha colla retta t'. Si ricava perciò (n° 7):

$$\lambda_1 = \mu, \qquad \mu_1 = \lambda - \mu, \qquad t_1 \equiv p'.$$

3° $\lambda = \mu$.

In tal caso il ciclo X_1 ha tanto colla retta p' che colla retta t' λ intersezioni. Si ricava quindi (n° 7) che l'ordine di X_1 è $\lambda_1 = \lambda$, ma nulla si può dire della sua classe μ_1 e della sua tangente t_1,

solo si può dire che la retta t_1 è una retta passante per P_1, diversa dalle rette p' e t'. Però, noti μ_1 e t_1, è chiaro che la conica del piano π (passante per P, A, B), corrispondente alla retta t_1, ha (n° 9) col ciclo X $2\lambda + \mu_1$ intersezioni. Nel piano π esiste un ∞^5 di coniche secanti la curva C d'ordine $n (> 2)$ secondo una serie lineare g^5_{2n} (n° 1). Questa serie lineare avrà in P e sul ciclo X una singolarità ben definita $[0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5]$ (n^i 3 e 5), ove $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4 < \sigma_5$. Intanto la conica generica del piano π passante per P ha λ intersezioni col ciclo X (n° 9), quindi $\sigma_1 = \lambda$. La conica generica passante per P e tangente al ciclo X ha (n° 9) con esso 2λ intersezioni, quindi $\sigma_2 = 2\lambda$. Le coniche decomposte nella tangente al ciclo X ed in una retta per P, diversa dalla t, hanno 3λ intersezioni col ciclo, finalmente la conica degenere, costituita dalla retta t contata 2 volte, ha col ciclo 4λ intersezioni. Abbiamo così trovato 4 dei 5 numeri σ_i. Esisterà quindi almeno una conica propria del piano π avente $2\lambda + \nu$ intersezioni col ciclo X, ove il numero ν è > 0 e diverso da λ e da 2λ.

Tre casi possono quindi darsi: $0 < \nu < \lambda$; $\lambda < \nu < 2\lambda$; $2\lambda < \nu$.

Se $0 < \nu < \lambda$, i numeri σ_i sono:

$$\sigma_1 = \lambda, \quad \sigma_2 = 2\lambda, \quad \sigma_3 = 2\lambda + \nu, \quad \sigma_4 = 3\lambda, \quad \sigma_5 = 4\lambda.$$

In tal caso esiste nel piano π una rete di coniche proprie (passanti per P e tangenti al ciclo X) aventi con X $2\lambda + \nu$ intersezioni. Tutte le coniche aventi col ciclo un numero maggiore d'intersezioni sono degeneri. Quindi, comunque sia stata fatta la scelta dei punti A, B nel piano π (purchè la retta t sia sempre diversa da PA, PB), esiste una conica propria τ passante per P, A, B, avente con X $2\lambda + \nu$ intersezioni. Allora la retta τ' che ad essa corrisponde nel piano π' ha col ciclo X_1 $\lambda + \nu$ intersezioni (n° 9), e, siccome il ciclo X_1 è dell'ordine λ, si ha $t_1 \equiv \tau'$, $\mu_1 = \nu$. La classe del ciclo X_1 è quindi inferiore a λ (essendo per ipotesi $\nu < \lambda$).

Nel caso poi in cui $\lambda < \nu < 2\lambda$, si ha:

$$\sigma_1 = \lambda, \quad \sigma_2 = 2\lambda, \quad \sigma_3 = 3\lambda, \quad \sigma_4 = 2\lambda + \nu, \quad \sigma_5 = 4\lambda.$$

Allora nel piano π esiste una rete $[\tau]$ di coniche proprie (passanti per P e tangenti al ciclo X), la curva generica della quale ha 3λ intersezioni con X, la rete contiene un fascio di coniche proprie (τ), la cui curva generica ha $2\lambda+\nu$ intersezioni col ciclo; la sola conica avente un numero $>2\lambda+\nu$ d'intersezioni col ciclo è la retta tangente al ciclo, contata due volte. Sicchè, se i punti A e B sono stati scelti in situazione generica, per essi passa una conica della rete $[\tau]$, ma non una conica del fascio (τ); in altri termini, esiste una conica τ passante per P, A, B ed avente 3λ intersezioni col ciclo. Allora si dirà *generica* la trasformazione quadratica impiegata. Denotando con τ' la retta del piano π' corrispondente alla conica τ, si ha subito $t_1\equiv\tau'$; $\mu_1=\lambda$. In tal caso adunque l'ordine e la classe del ciclo X_1 sono ancora uguali a λ. Ma, se A e B fossero stati presi sopra una stessa conica τ del fascio (τ), allora la trasformazione non sarebbe *generica*, e, denotando con τ' la retta di π' corrispondente alla conica τ, si avrebbe $t_1\equiv\tau'$, $\mu_1=\nu$ e quindi $\mu_1>\lambda$.

Nel caso finalmente in cui sia $2\lambda<\nu$, si ha:

$$\sigma_1=\lambda,\quad \sigma_2=2\lambda,\quad \sigma_3=3\lambda,\quad \sigma_4=4\lambda,\quad \sigma_5=2\lambda+\nu.$$

Allora nel piano π esiste una rete di coniche proprie $[\tau]$, la cui curva generica ha 3λ intersezioni col ciclo, questa rete contiene un fascio di coniche proprie (τ) la cui curva generica ha 4λ intersezioni col ciclo, questo fascio contiene *una* conica propria τ, avente $2\lambda+\nu$ intersezioni col ciclo X. Se i punti A, B sono stati scelti in situazione generica, per essi passa una curva della rete $[\tau]$ ma non del fascio (τ), quindi $\mu_1=\lambda$. Se poi i punti A e B sono scelti su una stessa curva del fascio (τ), ma non sulla curva τ, allora $\mu_1=2\lambda$; finalmente, se i punti A e B trovansi sulla conica τ, allora $\mu_1=\nu$.

Si vede quindi che, tanto nel caso $\lambda<\nu<2\lambda$ che nel caso di $\nu>2\lambda$, se la trasformazione impiegata è *generica* (nel senso spiegato) il ciclo X_1 è ancora dell'ordine λ e della classe λ.

Riepilogando:

Siano in un piano π: P, A, B tre punti distinti, t una retta

uscente da P, diversa da PA e da PB, C una curva avente in P un ciclo X, d'ordine λ e classe μ, colla tangente t (n° 7). *Fatta una trasformazione quadratica del piano π, coi tre punti fondamentali in P, A, B, denotando con π' il piano trasformato, con p', a', b' le rette fondamentali di questo corrispondenti ai punti P, A, B, con t' la retta corrispondente a t, con P_1 il punto d'intersezione di t' e p', alla curva C corrisponde una curva C_1 dotata in P_1 d'un ciclo X_1 corrispondente al ciclo X. Denotando con λ_1, μ_1, t_1 l'ordine, la classe e la tangente al ciclo X_1, si hanno i seguenti casi:*

1° $\lambda < \mu$; *allora* $\lambda_1 = \lambda$, $\mu_1 = \mu - \lambda$, $t_1 \equiv t'$.

2° $\lambda > \mu$; *allora* $\lambda_1 = \mu$, $\mu_1 = \lambda - \mu$, $t_1 \equiv p'$.

3° $\lambda = \mu$; *allora* $\lambda_1 = \lambda$ *e* t_1 *è diversa da* p' *e da* t'.

In tal caso esiste nel piano π almeno una conica avente $2\lambda + \nu$ intersezioni col ciclo X, ove il numero ν è > 0 e diverso da λ e da 2λ. Se $\nu < \lambda$, allora sarà certamente $\mu_1 = \nu$, comunque si siano scelti i punti A, B. Se poi $\nu > \lambda$, allora, scelti in situazione generica i punti A, B, ossia scelta una trasformazione generica, per P, A, B passa una conica avente con X 3λ intersezioni, ed allora $\mu_1 = \lambda$. Ma si possono scegliere i punti A e B in guisa che per P, A, B passi una conica avente un numero $> 3\lambda$ d'intersezioni col ciclo X, ed allora $\mu_1 > \lambda$.

13. S'è visto nel n° precedente che, se C è una curva piana d'ordine n dotata d'un ciclo X d'ordine λ e classe λ, avente l'origine P e la tangente t, con una trasformazione quadratica del piano π in un piano π', per la quale P sia un punto fondamentale e le rette fondamentali PA, PB siano diverse da t, al ciclo X corrisponde un ciclo X_1 la cui origine P_1 è il punto d'intersezione delle rette p', t', corrispondenti a P ed a t, e la cui tangente t_1 è diversa da p'. L'ordine di X_1 è λ e la classe $\mu_1 \leqq \lambda$, se la trasformazione è generica, altrimenti può essere $\mu_1 > \lambda$. Se $\mu_1 < \lambda$, ci fermiamo; ma se $\mu_1 \geqq \lambda$, applichiamo ancora al piano π' una trasformazione quadratica simile alla precedente, e così perverremo ad un ciclo X_2 d'ordine λ, d'origine P_2, e la cui tangente t_2 non è retta fondamentale del piano trasformato (n° 12), e così di seguito.

È chiaro che, se $\lambda > 1$, dopo un certo numero di trasforma-

zioni, dobbiamo necessariamente pervenire ad un ciclo il cui ordine è λ e la cui classe è $< \lambda$. Difatti, denotando con D l'abbassamento sul genere prodotto dalla singolarità che la curva C ha in P, e con p il genere di C (supposta irreduttibile), si ha (n° 10):

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - D - F,$$

essendo F la somma degli abbassamenti dovuti alle altre singolarità di C. Intanto, se dopo m trasformazioni otteniamo ancora un ciclo d'ordine λ e classe $\geqq \lambda$, fatta un'altra trasformazione, avremo ancora un ciclo d'ordine λ (n° 12), sicchè (n° 11):

$$D \geqq \frac{m+1}{2}\lambda(\lambda-1),$$

e si vede che, dopo un certo numero m di trasformazioni, D sorpasserebbe $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - F$, e quindi p diverrebbe negativo, il che (n° 6) è assurdo (*).

Quindi, dopo un certo numero α di trasformazioni quadratiche, perverremo ad un ciclo il cui ordine è λ e la cui classe è $\mu < \lambda$. Noi chiameremo il numero $\alpha (\geqq 1)$ *indice* del ciclo X. Il numero μ verrà poi detto *iperclasse* del ciclo (**). Ma, per giustificare pienamente questi nomi, che noi abbiamo dato ad α ed a μ, bisognerà far vedere che tali numeri non variano colla scelta delle trasformazioni quadratiche (purchè queste soddisfacciano sempre alle condizioni poste).

Difatti indichiamo con $T_1, T_2, \ldots, T_\alpha$ le α trasformazioni quadratiche impiegate per cadere in un ciclo d'ordine λ e classe $\mu < \lambda$. Indichiamo con $X_1, X_2, \ldots, X_{\alpha-1}, X_\alpha$ i successivi cicli trasformati, con $P_1, P_2, \ldots, P_{\alpha-1}, P_\alpha$ le loro origini e con $t_1, t_2, \ldots, t_{\alpha-1}, t_\alpha$ le loro tangenti. Per ipotesi, i cicli

(*) Del resto su considerazioni analoghe si fonda la dimostrazione del teorema di Noether data dal sig. Bertini nella Memoria citata.

(**) Introduco questi due nuovi vocaboli per ottenere nel seguito maggiore semplicità di linguaggio.

X, X_1, X_2, ..., $X_{\alpha-1}$ sono d'ordine λ e di classe $\geqq \lambda$, mentre il ciclo X_α è d'ordine λ e classe $\mu < \lambda$. Inoltre (n° 12) le tangenti t_1, t_2, ..., $t_{\alpha-1}$, t_α sono certamente diverse rispettivamente dalle rette (fondamentali) corrispondenti ai punti P, P_1, ..., $P_{\alpha-1}$. Ma, se ancora noi facessimo una trasformazione $T_{\alpha+1}$ (con un punto fondamentale in P_α), perverremmo ad un ciclo $X_{\alpha+1}$, d'origine $P_{\alpha+1}$, d'ordine μ e classe $\lambda - \mu$, ammettente per tangente la retta fondamentale corrispondente al punto P_α, la quale noi indicheremo con $p_{\alpha+1}$ (n° 12). Noi allora possiamo, nel piano π dato, costruire una curva Γ d'ordine abbastanza elevato, in modo tale che essa passi semplicemente per P, e che le sue trasformate mediante T_1, T_2, ..., T_α, $T_{\alpha+1}$ passino [semplicemente (n° 12)] per P_1, P_2, ..., P_α, $P_{\alpha+1}$; ma è chiaro che l'ultima curva trasformata di Γ non può esser tangente al ciclo $X_{\alpha+1}$, altrimenti sarebbe tangente alla retta $p_{\alpha+1}$ fondamentale, e quindi la curva Γ non passerebbe semplicemente per P. Quindi la curva Γ ha (n° 9)

$$i = (\alpha + 1)\lambda + \mu$$

intersezioni col ciclo X e non più. Non si può costruire una curva nel piano π, la quale passi per P con un sol ramo ed abbia un numero $> i$ d'intersezioni col ciclo X, ossia: *nel piano π si possono costruire curve passanti semplicemente per P ed aventi ivi $i = (\alpha + 1)\lambda + \mu$ intersezioni col ciclo X, ed il numero i è il massimo numero d'intersezioni che il ciclo X può avere con una curva la quale passi per P con un sol ramo.*

Così i numeri μ ed $\alpha + 1$ sono rispettivamente il resto ed il quoziente della divisione di i per λ, e quindi sono indipendenti dalle trasformazioni impiegate.

Riepilogando:

È data in un piano π una curva C passante per P, ed X è un ciclo di C coll'origine in P. Si suppone che l'ordine e la classe di X (n° 7) siano entrambi uguali a $\lambda (> 1)$.

Allora, eseguendo delle trasformazioni quadratiche successive, aventi per punti fondamentali rispettivamente il punto P ed i punti origini dei cicli trasformati, ma gli altri punti fondamentali fuori dalle tan-

genti a tali cicli, ci fermeremo appena che otterremo un ciclo d'ordine λ *e classe* $\mu < \lambda$. *Denotando con* α *il numero delle trasformazioni impiegate, i numeri* α *e* μ *non dipendono dalle trasformazioni scelte.*

I due numeri interi α *e* μ *si diranno rispettivamente* ***indice*** *ed* ***iperclasse*** *del ciclo X, e si ha:*

$$\alpha \geqq 1, \qquad 0 < \mu < \lambda.$$

Inoltre il numero

$$i = (\alpha + 1)\lambda + \mu$$

rappresenta il massimo numero delle intersezioni che il ciclo X può avere con una curva del piano π, *la quale abbia in P un punto semplice. Questo massimo può, in ogni caso, venire raggiunto.*

14. Sia π un piano, C una curva di esso, dotata in P d'una certa singolarità. Sia X un ciclo di C coll'origine in P. Sia t la tangente al ciclo (n° 7). Quando noi diremo di *fare una trasformazione quadratica sul ciclo X*, intenderemo di eseguire sul piano π una trasformazione quadratica in cui un punto fondamentale sia P e gli altri due A, B siano distinti fra loro e da P e tali che la retta t non coincida nè con PA nè con PB. Quando la classe e l'ordine di X sono numeri diversi, la tangente del ciclo trasformato è la retta corrispondente a t, se la classe di X supera l'ordine (n° 12), ovvero è la retta fondamentale corrispondente al punto P, se la classe di X è inferiore all'ordine. Quando la classe di X è uguale all'ordine, nulla si può dire *a priori* della tangente al ciclo trasformato, solo che essa è una retta uscente dall'origine di questo e che non è nè la retta corrispondente a t nè la retta fondamentale corrispondente a P (n° 12).

Ricordato ciò, noi indicheremo con λ_1 l'ordine del ciclo X e con λ_0 il numero delle intersezioni che esso ha colla sua tangente t ($\lambda_0 > \lambda_1$). Il numero λ_0 non è altro (n° 7) che la somma dell'ordine e della classe di X.

Noi adesso daremo la definizione di certi numeri legati al ciclo

X ed invariantivi rispetto alle trasformazioni omografiche del piano π, i quali vengon detti *combinazioni caratteristiche*. Non faremo altro che tradurre sinteticamente e con lievi modificazioni una Nota del sig. Noether dal titolo: *Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier* (questi Rendiconti, t. IV, pp. 89-108).

Sarà intanto, per le ipotesi fatte,

$$\lambda_0 = l_0 \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\lambda_1 = l_1 \lambda_2 + \lambda_3$$

$$\lambda_2 = l_2 \lambda_3 + \lambda_4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_{q-2} = l_{q-2} \lambda_{q-1} + \mu_1$$

$$\lambda_{q-1} = l_{q-1} \mu_1$$

con $q \geqq 1$, $\lambda_i < \lambda_{i-1}$ $(\mu_1 < \lambda_{q-1})$.

Si vede (n° 12) che, se operiamo una trasformazione quadratica T_1 sul ciclo X (nel senso sopra stabilito), se $l_0 > 2$, ovvero se $l_0 = 2$ e $\lambda_2 > 0$, perveniamo ad un ciclo X_1, dell'ordine λ_1 ed avente $\lambda_0 - \lambda_1$ intersezioni colla sua tangente, pienamente determinata (n° 12); se $l_0 = 1$, il ciclo X_1 è d'ordine λ_2 ed ha λ_1 intersezioni colla sua tangente (pienamente determinata); se poi $l_0 = 2$, $\lambda_2 = 0$, il ciclo primitivo X sarebbe d'ordine λ_1 e classe λ_1 e quindi X_1 sarebbe d'ordine λ_1, ma nulla potrebbe dirsi *a priori* della sua tangente e della sua classe.

In generale, possiamo dire che, dopo l_0 trasformazioni sul ciclo X, perveniamo ad un ciclo X_{l_0} d'ordine λ_2 ed avente λ_1 intersezioni colla sua tangente (pienamente determinata); dopo altre l_1 trasformazioni, ci riduciamo ad un ciclo $X_{l_0+l_1}$ d'ordine λ_3, avente colla sua tangente, pienamente determinata, λ_2 intersezioni, etc.; infine, dopo $l_0 + l_1 + l_2 + \ldots + l_{q-2}$ trasformazioni quadratiche sul ciclo X, perveniamo ad un ciclo $X_{l_0+l_1+\ldots+l_{q-2}}$ il cui ordine è μ_1 e la cui

tangente (pienamente determinata) ha con esso λ_{q-1} intersezioni. Se $\mu_1 = 1$, noi diremo che il ciclo X è stato *risoluto*, e ci fermiamo; ma se $\mu_1 > 1$, noi facciamo altre $l_{q-1} - 2$ trasformazioni quadratiche sul ciclo $X_{l_0+l_1+\dots+l_{q-2}}$, ottenendo un ciclo $X_{l_0+l_1+\dots l_{q-2}+l_{q-1}-2}$, d'ordine μ_1 ed avente $2\mu_1$ intersezioni colla sua tangente (pienamente determinata), ossia un ciclo d'ordine μ_1 e classe μ_1. Denoteremo allora con ε e con μ_0 rispettivamente l'indice e l'iperclasse (n° 13) del ciclo $X_{l_0+l_1+\dots+l_{q-1}-2}$. Allora, con altre ε trasformazioni sul ciclo $X_{l_0+l_1+\dots+l_{q-1}-2}$, si perviene ad un ciclo d'ordine μ_1 e classe $\mu_0 < \mu_1$ (mentre che i cicli intermedii hanno l'ordine μ_1 e la classe $\geqq \mu_1$). Questo ciclo d'ordine μ_1 e classe μ_0 verrà denotato con $X_{l_0+l_1+\dots+l_{q-1}-2+\varepsilon}$. Con una nuova trasformazione su questo, si perviene ad un ciclo d'ordine μ_0, avente μ_1 intersezioni colla sua tangente. Questo ciclo verrà denotato con $X_{l_0+l_1+\dots+l_{q-1}+\varepsilon-1}$. Essendo $\varepsilon \geqq 1$ (n° 13), questo ciclo o coincide col ciclo $X_{l_0+l_1+\dots+l_{q-1}}$, ovvero è un ciclo che si presenta dopo questo, con altre trasformazioni quadratiche. Denoteremo il ciclo $X_{l_0+l_1+\dots+l_{q-1}}$ con Y, con α il numero $\varepsilon - 1$ ($\alpha \geqq 0$) e con Y_α il ciclo $X_{l_0+\dots+l_{q-1}+\varepsilon-1}$. Il numero μ_0, ordine di Y_α, è minore di μ_1. Se $\mu_0 = 1$, ci fermiamo ed allora il ciclo X è stato *risoluto*, altrimenti continuiamo ad applicare al ciclo Y_α altre trasformazioni quadratiche.

Intanto osserviamo che, se il ciclo X fosse *isolato*, cioè, se la curva C del piano dato non avesse in P altri cicli che il ciclo X, allora anche i cicli trasformati sarebbero isolati, e, denotando con D l'abbassamento sul genere prodotto da X (n° 10), con D_Y, D_{Y_α} quelli prodotti da Y, Y_α, si troverebbe (n° 11):

$$D = \tfrac{1}{2}[l_0\lambda_1(\lambda_1 - 1) + l_1\lambda_2(\lambda_2 - 1) + \dots + l_{q-1}\mu_1(\mu_1 - 1)] + D_Y,$$

ossia

$$D = \tfrac{1}{2}[(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_1 - 1) + (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - 1) + \dots + \lambda_{q-1}(\mu_1 - 1)] + D_Y,$$

cioè

$$D = \tfrac{1}{2}[\lambda_0(\lambda_1 - 1) - (\lambda_1 - \mu_1)] + D_Y, \tag{1}$$

che potrebbe anche scriversi

$$D = \tfrac{1}{2}[\lambda_1(\lambda_0 - 1) - (\lambda_0 - \mu_1)] + D_Y. \tag{2}$$

Se fosse $\mu_1 = 1$, sarebbe Y di prim'ordine e quindi (n° 10) $D_Y = 0$.

Il ciclo sarebbe allora risoluto, prima d'ottenere Y. Ma, se $\mu_1 > 1$, allora si ha (n° 11):

$$3) \qquad D_Y = \frac{1}{2}\alpha\mu_1(\mu_1 - 1) + D_{Y\alpha}.$$

Laonde, per la 1) o per la 2) si ha

$$4) \qquad D = \frac{1}{2}[\lambda_0(\lambda_1 - 1) - (\lambda_1 - \mu_1) + \alpha\mu_1(\mu_1 - 1)] + D_{Y\alpha}$$

ossia:

$$5) \qquad D = \frac{1}{2}\lambda_1(\lambda_0 - 1) - (\lambda_0 - \mu_1) + \alpha\mu_1(\mu_1 - 1)] + D_{Y\alpha}.$$

Ora, se $\mu_0 = 1$, allora $D_{Y\alpha} = 0$; ma se $\mu_0 > 1$, continueremo ad applicare al ciclo Y_α trasformazioni quadratiche, replicando sul ciclo Y_α le stesse cose dette per X, e ciò tanto nell'ipotesi che X sia isolato, quanto in quella che non sia isolato. Sia perciò ν_1 il massimo comun divisore tra μ_1 e μ_0 ($\nu_1 \leqq \mu_0$). Allora:

$$\mu_1 = m_0\mu_0 + \mu_2$$

$$\mu_2 = m_1\mu_2 + \mu_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_{s-2} = m_{s-2}\mu_{s-1} + \nu_1$$

$$\mu_{s-1} = m_{s-1}\nu_1.$$

Con $m_0 + m_1 + \ldots + m_{s-2}$ trasformazioni quadratiche sul ciclo Y_α, perveniamo ad un ciclo $Y_{\alpha+m_0+m_1+\ldots+m_{s-2}}$, d'ordine ν_1 ed avente colla sua tangente μ_{s-1} intersezioni. Se $\nu_1 = 1$, il ciclo è risoluto e ci fermiamo, altrimenti, con altre $m_{s-1} - 2$ trasformazioni, perveniamo ad un ciclo $Y_{\alpha+m_0+\ldots+m_{s-1}-2}$ d'ordine ν_1 e classe ν_1. Allora denotiamo con η e $\nu_0 (< \nu_1)$ l'indice e l'iperclasse di tal

ciclo (n° 13); con altre $\eta + 1$ trasformazioni perveniamo ad un ciclo d'ordine ν_0, avente ν_1 intersezioni colla sua tangente (mentre i cicli intermedi sono tutti d'ordine ν_1). Noi porremo $\beta = \eta - 1$ $(\beta \geqq 0)$, e chiameremo Z il ciclo $Y_{\alpha+m_0+m_1+\dots+m_{\beta-1}}$ e con Z_β l'ultimo ciclo ottenuto. Se $\nu_0 = 1$, il ciclo X è risolto, altrimenti su Z_β ripetiamo le cose dette per X, Y_α.

Se X è isolato, sono tali anche Y_α, Z_β, e, denotando con D_{Z_β} l'abbassamento sul genere prodotto da Z_β, possiamo scrivere [per la formula 5)]:

$$D_{Y\alpha} = \tfrac{1}{2}[\mu_0(\mu_1 - 1) - (\mu_1 - \nu_1)] + D_{Z_\beta} + \tfrac{1}{2}\beta\nu_1(\nu_1 - 1).$$

E, se $\nu_0 = 1$ (ovvero anche $\nu_1 = 1$), basterà porre $D_{Z_\beta} = 1$ (n° 10).

Quindi, per la 4):

$$\text{6)}\qquad \begin{aligned} D = \tfrac{1}{2}[&\lambda_0(\lambda_1 - 1) + \mu_0(\mu_1 - 1) - (\lambda_1 - \nu_1) \\ &+ \alpha\mu_1(\mu_1 - 1) + \beta\nu_1(\nu_1 - 1)] + D_{Z_\beta}. \end{aligned}$$

Ora, se $\nu_0 > 1$, noi continueremo a trasformare il ciclo Z_β nel modo anzidetto (tanto quando X è isolato quanto quando non lo sia), e terremo notazioni analoghe. Ci fermiamo appena che otteniamo un ciclo di prim'ordine, il che avverrà certamente, essendo i numeri λ_1, μ_0, $\nu_0 \dots$, interi decrescenti.

Allora avremo ottenuto i seguenti numeri:

$$\lambda_0, \lambda_1;\ \mu_1, \alpha, \mu_0;\ \nu_1, \beta, \nu_0;\ \rho_1, \gamma, \rho_0; \dots ;\ \tau_1, \delta, \tau_0;\ \chi_1, \zeta, 1,$$

coll'avvertenza che potrebbe essere $\chi_1 = 1$, ed allora non si considererebbe il numero ζ.

In ogni caso, se il ciclo X (e per conseguenza i suoi trasformati) fosse isolato, sarebbe [per la 6)]:

$$\text{7)}\qquad \begin{aligned} D = \tfrac{1}{2}[&\lambda_0(\lambda_1 - 1) + \mu_0(\mu_1 - 1) + \nu_0(\nu_1 - 1) + \dots \\ &\dots + \tau_0(\tau_1 - 1) + \alpha\mu_1(\mu_1 - 1) + \beta\nu_1(\nu_1 - 1) + \dots \\ &\dots + \delta\tau_1(\tau_1 - 1) + (\zeta\chi_1 + 1)(\chi_1 - 1) - (\lambda_1 - 1)]. \end{aligned}$$

I numeri $\alpha, \beta, \ldots, \delta, \zeta$ sono numeri interi positivi o nulli, e $\lambda_0, \lambda_1; \mu_0, \mu_1; \nu_0, \nu_1; \ldots; \tau_0, \tau_1; \chi_1$ sono numeri interi e positivi tali che

$$\lambda_0 > \lambda_1 \geqq \mu_1 > \mu_0 \geqq \nu_1 > \nu_0 \geqq \ldots \geqq \tau_1 > \tau_0 \geqq \chi_1 \geqq 1.$$

Inoltre μ_1 è il massimo divisore comune a λ_0, λ_1; ν_1 il massimo divisore comune a μ_0, μ_1; etc. Non si considera il termine $(\zeta\chi_1 + 1)(\chi_1 - 1)$ nella 7), quando $\chi_1 = 1$.

Noi porremo, col Noether, così quando il ciclo X è isolato, come quando non lo sia,

$$\Delta_0 = \lambda_1, \ \alpha_0 = \lambda_0; \ \Delta_1 = \mu_1; \ \alpha_1 = \mu_0 + \alpha\mu_1; \ \Delta_2 = \nu_1, \ \alpha_2 = \nu_0 + \beta\nu_1, \ldots$$
$$\ldots, \Delta_{h-1} = \tau_1, \ \alpha_{h-1} = \tau_0 + \delta\tau_1; \ \Delta_h = \chi_1, \ \alpha_h = 1 + \zeta\chi_1,$$

e ciò se $\chi_1 > 1$. Se poi $\chi_1 = 1$, non considereremo nè Δ_h nè α_h e scambieremo, per simmetria di scrittura, Δ_{h-1} e α_{h-1} con Δ_h ed α_h. Si avrà così

$$\Delta_0 = \lambda_1, \ \alpha_0 = \lambda_0; \ \Delta_1 = \mu_1; \ \alpha_1 = \mu_0 + \alpha\mu_1, \ \Delta_2 = \nu_1, \ \alpha_2 = \nu_0 + \beta\nu_1; \ldots$$
$$\ldots; \Delta_h = \tau_1, \ \alpha_h = \tau_0 + \delta\tau_1.$$

Il numero Δ_1 è, in ogni caso, il massimo comun divisore di Δ_0 ed α_0; Δ_2 il massimo comun divisore di Δ_1 ed α_1 etc. etc., finalmente α_h e Δ_h sono primi fra loro e si ha:

$$\alpha_0 > \Delta_0 \geqq \Delta_1 > \Delta_2 > \Delta_3 > \ldots > \Delta_h > 1.$$

Le coppie di numeri interi:

$$\alpha_0, \Delta_0; \quad \alpha_1, \Delta_1; \quad \alpha_2, \Delta_2; \ \ldots; \ \alpha_h, \Delta_h$$

diconsi combinazioni caratteristiche relative al ciclo X (*).

(*) Lo Smith, che per il primo fece osservare l'importanza di tali numeri nello studio delle singolarità (procedendo però con metodi del tutto diffe-

Se il ciclo X è isolato, l'abbassamento sul genere della curva che lo contiene, prodotto dalla singolarità X (n° 10), *è* [per la formola 7)]:

$$8)\quad D = \tfrac{1}{2}[\alpha_0(\Delta_0 - 1) + \alpha_1(\Delta_1 - 1) + \ldots + \alpha_h(\Delta_h - 1) - (\Delta_0 - 1)]\ (*).$$

Un'osservazione abbiamo da fare. Nel nostro ragionamento s'è visto che, se $\mu_1 > 1$, allora, dopo un certo numero di trasformazioni, si presenta un ciclo d'ordine μ_1 e classe μ_1. Della tangente del trasformato di questo, e, per conseguenza, delle origini dei successivi, niente può dirsi *a priori*. Ora, se noi diciamo che un ciclo X è *determinato dalla conoscenza dell'ordine, della classe, dell'origine e della tangente,* quando si possano subito assegnare le trasformazioni quadratiche successive atte a risolverlo, ed, in virtù di esse, siano note le origini e le tangenti dei cicli trasformati, abbiamo la proposizione:

Un ciclo è determinato dalla conoscenza dell'ordine, della classe, dell'origine e della tangente, quando, e solamente quando, l'ordine è primo colla classe.

Termineremo coll'osservare che, come dalla conoscenza dei numeri λ_0, λ_1; μ_1, α, μ_0; ν_1, β, ν_0; etc. si trae quella dei numeri α_0, Δ_0; α_1, Δ_1; α_2, Δ_2; etc., così si può viceversa da questi ricavare quelli. Si ha difatti: $\lambda_0 = \alpha_0$, $\lambda_1 = \Delta_0$, $\mu_1 = \Delta_1$, $\nu_1 = \Delta_2$, etc., ed inoltre α e μ_0 sono rispettivamente il quoziente ed il resto della

---

renti), fa uso dei numeri Δ dati qui e dei numeri $\gamma_0 = \alpha_0$, $\gamma_1 = \alpha_0 + \alpha_1$, ..., $\gamma_h = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_h$. Vedasi la sua Memoria: *On the Higher Singularities of Plane Curves* (Proced. of the London Math. Soc., t. VI). L'Halphen invece (vedi, ad es., l'*Étude sur les points singuliers,* nell'Appendice alla traduzione francese del Trattato sulle curve piane del Salmon) adopera i numeri:

$$q_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta_1},\quad s_0 = \frac{\alpha_0}{\Delta_1};\quad q_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_2},\quad s_1 = \frac{\alpha_1}{\Delta_2};\ \ldots;\ q_h = \Delta_h,\quad s_h = \alpha_h.$$

(*) Per la formola 1) del n° 8, denotando con R l'abbassamento prodotto nella classe della curva data dal ciclo X, supposto isolato, si ha: $R = 2D + (\Delta_0 - 1)$, formola che si trova nella su riferita Nota del sig. Noether insieme alla 8). Per noi essa non ha importanza, perchè è immediata conseguenza dei teoremi del n° 6.

divisione di α_1 per Δ_1, β e ν_0 il quoziente ed il resto della divisione di α_2 per Δ_2, etc. Osserviamo infine che, essendo α_h, Δ_h l'ultima coppia dei numeri caratteristici, posto $\chi_1 = \Delta_h$ e denotati con ζ e χ_0 il resto ed il quoziente della divisione di α_h per Δ_h, restano escluse le distinzioni che noi abbiam fatto per definire le combinazioni caratteristiche mediante i numeri λ_0, λ_1; μ_1, α, μ_0; etc.

Se $\chi_0 > 1$, i numeri χ_1, ζ, χ_0 coincidono con quelli che precedentemente denotavamo τ_1, δ, τ_0; se poi $\chi_0 = 1$, ossia, se $\alpha_h \equiv 1 \pmod{\Delta_h}$, allora i tre numeri χ_1, ζ, χ_0 sono quelli che prima abbiamo considerato, cioè χ_1, ζ, 1.

§ 3.

Costruzione dei cicli aventi date caratteristiche.

15. Nel n° 14 abbiamo visto come, dato un ciclo X, da esso possano ricavarsi, mediante successive trasformazioni quadratiche, certe coppie di numeri α_0, Δ_0; α_1, Δ_1; ...; α_h, Δ_h che si chiamarono (col Noether) *combinazioni caratteristiche* relative al ciclo X. Si osservò che tali numeri non sono fra di loro indipendenti; ma Δ_1 è il massimo divisore comune ad α_0 e Δ_0, Δ_2 è il massimo comun divisore di α_1 e Δ_1, ..., Δ_h il massimo comun divisore di α_{h-1} e Δ_{h-1}. Si osservò inoltre che α_h, Δ_h sono primi fra loro e che

$$\alpha_0 > \Delta_0 \geqq \Delta_1 > \Delta_2 > \Delta_3 > \dots > \Delta_h > 1.$$

Viceversa, *dati* α_0, Δ_0; α_1, α_2, ..., α_h *ed indicando con* Δ_1, Δ_2, ..., Δ_h *i massimi comuni divisori di* α_0 *e* Δ_0, *di* α_1 *e* Δ_1, *di* α_{h-1} *e* Δ_{h-1}, *supposto che* α_h *sia primo con* Δ_h *e che sia* $\alpha_0 > \Delta_0 \geqq \Delta_1 > \Delta_2 > \dots > \Delta_h > 1$, *noi diremo che il sistema di numeri* α_0, Δ_0; α_1, Δ_1; α_2, Δ_2; ...; α_h, Δ_h *è un sistema di caratteristiche.*

La ragione di questa denominazione che noi attribuiamo a tal sistema di numeri sta nel fatto che *noi possiamo sempre costruire infinite curve dotate in un punto dato di un ciclo, le cui combinazioni caratteristiche* (n° 14) *siano i numeri dati* α_0, Δ_0; α_1, Δ_1; ...; α_h, Δ_h, *quando questi formino un sistema di caratteristiche,*

Faremo anzi vedere che si possono costruire infinite curve dotate nel punto dato d'un ciclo *isolato* avente come combinazioni caratteristiche i numeri dati.

Per la dimostrazione, porremo, riferendoci alle notazioni del n° 14,

$$\alpha_0=\lambda_0,\quad \Delta_0=\lambda_1,\quad \Delta_1=\mu_1,\quad \alpha_1=\mu_0+\alpha\mu_1\,(0<\mu_0<\mu_1),$$
$$\Delta_2=\nu_1,\quad \alpha_2=\nu_0+\beta\nu_1\,(0<\nu_0<\nu_1),\ \ldots$$
$$\ldots,\ \Delta_h=\chi_1,\quad \alpha_h=\chi_0+\zeta\chi_1\,(0<\chi_0<\chi_1).$$

I numeri $\lambda_0, \lambda_1; \mu_0, \mu_1, \alpha$; etc., sono interi, e le $\alpha, \beta, \ldots, \zeta$ possono anche (tutte od in parte) esser nulle. Inoltre χ_0 e χ_1 sono primi tra loro, e χ_0 può essere anche 1. Ciò accade quando $\alpha_h \equiv 1 \pmod{\Delta_h}$. Per le ipotesi fatte, sarà:

$$\lambda_0=l_0\lambda_1+\lambda_2 \qquad (\lambda_2<\lambda_1)$$
$$\lambda_1=l_1\lambda_2+\lambda_3 \qquad (\lambda_3<\lambda_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_{q-2}=l_{q-2}\lambda_{q-1}+\mu_1 \qquad (\mu_1<\lambda_{q-1})$$
$$\lambda_{q-1}=l_{q-1}\mu_1,$$

ove $q \geqq 1$ (e perciò $\mu_1 \leqq \lambda_1$).

Inoltre

$$\mu_1=m_0\mu_0+\mu_2$$
$$\mu_0=m_1\mu_2+\mu_3$$
$$\mu_2=m_2\mu_3+\mu_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mu_{s-1}=m_{s-1}\nu_1$$

e così di seguito fino a

$$\chi_1 = k_0 \chi_0 + \chi_2$$

$$\chi_0 = k_1 \chi_2 + \chi_3$$

$$\chi_2 = k_2 \chi_3 + \chi_4$$

. . . .

$$\chi_{j-2} = k_{j-2} \chi_{j-1} + 1,$$

se $\chi_0 > 1$; se invece $\chi_0 = 1$, a queste uguaglianze bisogna sostituire l'identità

$$\chi_1 = \chi_1 \chi_0.$$

Osserviamo che, dato un ciclo X avente le date combinazioni caratteristiche, potremmo conoscere subito il numero N delle trasformazioni quadratiche atte a risolverlo. Precisamente (n° 14) il numero N è

$$1) \qquad N = \Sigma l + \Sigma m + \ldots + \Sigma k + \alpha + \beta + \ldots + \zeta,$$

se $\chi_0 > 1$; se poi $\chi_0 = 1$, l'N è lo stesso, se non che, in tal caso, non bisogna considerare nella 1) il termine Σk.

Ora supponiamo, per un momento, nota in un piano π una curva C dell'ordine n, dotata in un punto P del piano di un ciclo isolato X, avente come combinazioni caratteristiche i numeri dati. Sia t la tangente al ciclo. Assoggettiamo il piano π ad una trasformazione quadratica di cui un punto fondamentale sia P e gli altri due B, D non si trovino su t e siano a distanza finita da P. Supponiamo anche (per semplicità) che B e D siano a distanza finita fra loro. Sia π' il piano trasformato, C_1 la curva trasformata di C, A', B', D' i punti fondamentali del piano π' e P_1 il punto d'intersezione delle rette t' e $B'D'$ corrispondenti rispettivamente alla retta t ed al punto P.

Allora la curva C_1 è dell'ordine $2n - \lambda_1$, ha in B', D' due punti multipli ordinari del grado $n - \lambda_1$ ed in A' un punto (n)-plo. L'insieme delle curve dell'ordine $2n - \lambda_1$ dotate di tali punti multipli ordinari nei punti A', B', D', costituisce un sistema lineare $\infty^{\frac{n(n+3)}{2} - \frac{\lambda_1(\lambda_1+1)}{2}}$ che è il sistema corrispondente al sistema lineare, sul piano π, costituito da tutte le curve dell'ordine n dotate in P di un punto (λ_1)-plo. Indichiamo con k il numero di condizioni imposte dalla singolarità X in P alle curve dell'ordine n.

In altri termini, sia $\frac{n(n+3)}{2} - k$ la dimensione del sistema (lineare) costituito dalle curve del piano π dell'ordine n e dotate in P di cicli isolati X, colle caratteristiche date e tali inoltre che, in tutte le N trasformazioni quadratiche necessarie a risolverne uno, tutti i cicli trasformati degl'X abbiano sempre la stessa origine (e perciò vengano contemporaneamente risoluti). Indichiamo inoltre con k' il numero di condizioni che i cicli X_1, trasformati in π' dei cicli X, offrono alle curve dell'ordine $2n - \lambda_1$ (nel senso esposto precedentemente). Allora si vede subito essere

$$2) \qquad k \leqq \frac{\lambda_1(\lambda_1+1)}{2} + k' \ (^*).$$

Nell'N^{esimo} piano trasformato [vedi formola 1)], ai cicli X delle C corrispondono rami semplici aventi, in generale, uno stesso contatto con una retta data (n° 14). Ora il numero $k^{(N)}$ di condizioni che s'impongono ad una curva Γ obbligandola a passare per un punto dato e ad avere ivi un contatto dato con una retta data, è indipendente dall'ordine di Γ.

Formiamoci ora il numero

$$K = \sum \frac{\sigma(\sigma+1)}{2} + k^{(N)},$$

(*) Una formola, dovuta al prof. Guccia, ma della quale noi non ci serviremo, mostra che nella (2), per n abbastanza elevato, bisogna prendere il segno d'uguaglianza. Vedi Guccia: *Sur une question concernant les points singuliers des courbes algébriques planes* (Comptes Rendus, 1886).

ove i numeri σ sono gli ordini dei cicli X e dei loro trasformati [fino agli $(N-1)^{esimi}$]. Per la formola 2), si ha

$$K \geqq k.$$

Il numero K è quindi un limite superiore di k. Esso inoltre è indipendente da n, ma dipende soltanto dalle caratteristiche date, e per mezzo di esse, può sempre formarsi.

Ed ora osserviamo che, ammessa l'esistenza delle C e perciò la conoscenza di n, perveniamo in π_N ad un sistema lineare di curve $[C_N]$ la cui dimensione è $\geqq \frac{n(n+3)}{2} - K$ ed il cui ordine è un numero determinato ν_N. La curva generica di questo sistema ha, in certi punti determinati, delle singolarità ordinarie il cui grado dipende dal punto che si considera, dai numeri n ed N e dalle caratteristiche del ciclo X.

Inoltre la curva generica del sistema $[C_N]$ tocca in un punto dato una retta data, con un dato contatto. Viceversa, se noi sappiamo nel piano π_N costruire un sistema di curve che riempia a tutte queste condizioni, è chiaro che esso rappresenterà un sistema $[C]$ del piano π, la cui curva generica ha in P un ciclo isolato colle caratteristiche date. Ora, siccome è possibile scegliere un n tanto grande, che il numero $\frac{n(n+3)}{2} - K$ sia arbitrariamente grande, così è possibile costruire in π_N un tal sistema $[C_N]$ di dimensione arbitrariamente grande, e perciò in π un sistema $[C]$ di dimensione arbitrariamente grande e tale che la curva generica abbia in π un ciclo isolato colle date caratteristiche.

Così il teorema è dimostrato.

Nel costruire però i cicli X vi è molto dell'arbitrario, perchè (n° 14) alcune trasformazioni quadratiche possono scegliersi in infiniti modi.

Noi diremo che due cicli isolati aventi le stesse caratteristiche *sono atti a determinare un fascio di cicli della stessa natura,* quando tutti i trasformati dei due cicli fino all'N^{esimo} hanno sempre la stessa origine; cioè quando le trasformazioni quadratiche che ne risolvano uno risolvano anche l'altro.

La denominazione precedente segue dal fatto che in tal caso ed in esso soltanto, se C_n e C_m sono le curve degli ordini n ed m ($m \leq n$) che posseggono tali cicli, e C_{n-m} è una curva qualunque del piano dell'ordine $n-m$, non passante per l'origine di quei cicli, il fascio di curve determinato da C_n e dalla curva composta $C_m C_{n-m}$ è un fascio la cui curva generica ha, nell'origine di quei cicli, un ciclo isolato colle stesse caratteristiche dei due cicli dati.

È evidente perciò che la nostra definizione è indipendente dalla scelta delle trasformazioni quadratiche.

Inoltre, per quanto s'è detto precedentemente, segue che, dato un ciclo X è possibile in infiniti modi costruirne uno X' isolato, avente le stesse caratteristiche e tale che le origini dei trasformati (fino al ciclo risolto) di X coincidano con quelle di X'. Ed allora noi continueremo a dire che X, X' sono atti a determinare un fascio di cicli della stessa natura.

In generale noi potremo dire che due cicli X, Y (appartenenti o no ad una stessa curva), aventi le stesse combinazioni caratteristiche, *sono atti ad individuare un fascio di cicli della stessa natura*, quando, costruito un ciclo isolato X' atto a determinare con X un fascio di cicli della stessa natura, esso goda della stessa proprietà rispetto ad Y.

Allora le trasformazioni quadratiche che risolvono X, risolvono Y e viceversa.

16. Data in un piano π una curva C dotata in un punto P d'un ciclo X non isolato, le cui combinazioni caratteristiche (n° 14) siano i numeri:

$$\alpha_0,\ \Delta_0;\ \ \alpha_1,\ \Delta_1;\ \ldots;\ \alpha_k,\ \Delta_k,$$

noi sappiamo costruire delle curve aventi ivi un ciclo isolato colle stesse caratteristiche (n° 15). Se C' è una tal curva, allora l'abbassamento sul genere (n° 10) dovuto alla singolarità che la curva C' ha in P, è (n° 14):

$$D = \tfrac{1}{2}[\alpha_0(\Delta_0 - 1) + \alpha_1(\Delta_1 - 1) + \ldots + \alpha_k(\Delta_k - 1) - (\Delta_k - 1)].$$

Noi continueremo a dire che D *è l'abbassamento sul genere prodotto dal ciclo* X (benchè esso non sia isolato).

§ 4.

Intersezioni di due cicli. — Determinazione dell'abbassamento prodotto sul genere da una singolarità qualunque. — Che cosa possa intendersi per singolarità uguali e per singolarità simili.

17. Siano, in un piano π, X ed Y due cicli aventi la stessa origine P e degli ordini x, y. I cicli X, Y, che noi supponiamo distinti, o appartengono ad una stessa curva od appartengono a curve diverse. In ogni caso, possiamo (n° 14), con un numero finito di trasformazioni quadratiche, risolvere i due cicli, ossia ridurli a due rami semplici. Ma ciò che importa qui notare è questo: che, applicando contemporaneamente ad X, Y successive trasformazioni quadratiche (nel senso stabilito al n° 14), dopo un certo numero di queste, ad essi corrisponderanno due cicli aventi origini distinte. Ciò è evidente quando X, Y appartengano a curve diverse: allora, per ciò che s'è detto al n° 9, se α è il numero delle intersezioni che il ciclo X ha colla curva dotata in P del ciclo Y, dopo un certo numero finito $r(\leqq \alpha)$ di trasformazioni quadratiche, perverremo a due cicli colle origini distinte. Se poi i cicli X, Y appartengono ad una stessa curva dotata in P d'un punto (r)-plo (ove necessariamente $r \geqq 2$), denotando con D l'abbassamento sul genere prodotto da tal singolarità (n° 10), se dopo m trasformazioni quadratiche i cicli trasformati di X, Y hanno ancora la stessa origine, ivi la curva trasformata ha almeno un punto multiplo di grado 2 e quindi (n° 11),

$$D \geqq \tfrac{1}{2} r(r-1) + m.$$

Siccome D è un numero ben determinato, dopo un certo numero di trasformazioni, ai cicli X, Y corrisponderanno perciò due cicli colle origini distinte.

Per comodità, chiameremo X_0, Y_0 i cicli dati, e denoteremo

con P_0 la loro origine e con x_0, y_0 i loro ordini. Denotiamo ora con T_1 una trasformazione quadratica la quale, applicata ai cicli X_0, Y_0 (nel senso definito al n° 14), conduca a due cicli X_1, Y_1. Se X_1, Y_1 hanno origini distinte, ci fermiamo, altrimenti applichiamo ai cicli X_1, Y_1 una novella trasformazione quadratica T_2, e così di seguito. Dopo un certo numero m di trasformazioni $T_1, T_2, \ldots, T_{m-1}, T_m$, perverremo a due cicli colle origini distinte. Denotiamo con $X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}, X_m$ i successivi cicli trasformati di X_0, con $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m-1}, Y_m$ quelli di Y_0. Per ipotesi, per tutti i valori di i da 0 ad $m-1$, i cicli X_i, Y_i hanno la stessa origine, che denoteremo P_i, mentre che i cicli X_m, Y_m hanno origini distinte che denoteremo $P_{m,X}$, $P_{m,Y}$. Ciò posto, denotiamo con $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$ gli ordini dei cicli $X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}, X_m$, e con $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m$ quelli dei cicli $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{m-1}, Y_m$.

Il numero

$$I = x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_{m-1} y_{m-1}$$

è (per definizione) *il numero delle intersezioni dei cicli* X_0, Y_0.

Aggiungiamo che, qualora X_0, Y_0 avessero le origini distinte, porremmo $I = 0$.

Ma per giustificare pienamente una tale definizione, è necessario dimostrare che il numero I così definito è indipendente dalla scelta delle trasformazioni quadratiche (purchè soddisfino alle condizioni imposte). Noi dimostreremo subito ciò.

Prima di tutto osserviamo che i numeri $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$ dipendono soltanto dalle combinazioni caratteristiche (n° 14) del ciclo X_0, e similmente i numeri $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m$ dalle combinazioni caratteristiche del ciclo Y_0.

Ed ora costruiamo nel piano π una curva Γ la quale sia dotata in P_0 d'un ciclo X'_0 isolato, avente le stesse caratteristiche del ciclo X_0 e tale inoltre che, per tutte le trasformazioni successive $T_1, T_2, \ldots, T_{m-1}, T_m$, i cicli trasformati $X'_1, X'_2, \ldots, X'_{m-1}, X'_m$ abbiano le origini $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_{m,X}$ (n° 13).

Si sa (n° 9) che il numero I testè definito non è altro, in tal caso, che il numero d'intersezioni che il ciclo Y_0 ha colla curva Γ.

In virtù di questa osservazione, comunque noi cangiamo le trasformazioni (mantenendo sempre la loro proprietà di essere *trasformazioni sul ciclo* X nel senso stabilito al n° 14), il numero I non varia.

È chiaro, in virtù della definizione precedente, che:

Se in uno stesso piano π X *ed* Y *sono due cicli diversi aventi la stessa origine* P, *e facciamo una trasformazione quadratica del piano* π, *in cui* P *sia punto fondamentale e gli altri due punti siano fuori delle tangenti ad* X, Y *ed a distanza finita tra loro e da* P, *denotando con* X', Y' *i cicli trasformati, con* I' *il numero delle loro intersezioni e con* x, y *gli ordini di* X, Y, *il numero delle intersezioni di* X *ed* Y *è:*

$$I = xy + I'.$$

Ed ora I' è nullo quando le origini di X', Y' sono distinte, cioè quando le tangenti ad X e ad Y sono diverse, e viceversa. Quindi:

Il numero d'intersezioni di due cicli X, Y, *aventi la stessa origine, e degli ordini* x, y, *è almeno* xy. *È proprio questo numero, quando* X, Y *hanno le tangenti distinte; altrimenti è certamente maggiore.*

Il numero I' differenza fra il numero d'intersezioni I dei cicli X, Y, aventi la stessa origine, ed il prodotto dei loro ordini si dice *ordine di contatto* dei due cicli.

Per mezzo della costruzione della curva Γ fatta precedentemente e di un teorema del n° 9, si ha che:

Se, in un piano π, X, Y *sono due cicli diversi aventi la stessa origine* P, *e facciamo una trasformazione quadratica del piano* π, *per la quale* P *non sia punto fondamentale, nè giaccia su rette fondamentali, il numero delle intersezioni dei cicli trasformati* X', Y' *uguaglia quello delle intersezioni dei cicli* X, Y.

Inoltre è evidente (n° 9) che:

Il numero delle intersezioni di un ciclo X, *d'origine* P, *con una curva passante per* P *uguaglia la somma dei numeri d'intersezioni che il ciclo dato ha coi diversi cicli della curva data, uscenti da* P.

Rimandiamo il lettore al § V della Nota del sig. Noether: *Les combinaisons*, etc., etc., loc. cit., per l'espressione di I mediante le combinazioni caratteristiche di X e di Y, espressione che del resto sarebbe adesso molto facile a ricavare, dietro la definizione

data delle combinazioni caratteristiche e del numero I. Osserviamo soltanto che la sola conoscenza delle combinazioni caratteristiche non basta, in taluni casi, alla determinazione di I, cosa che del resto è evidente e di cui è tenuto conto nella citata Nota del sig. Noether.

18. Sia nel piano π una curva irreduttibile C dotata in un punto P di una singolarità $[\sigma]$, e siano $X_1, X_2, \ldots, X_\mu$ i cicli di C aventi l'origine nel punto P. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ gli ordini di tali cicli, allora la curva C ha in P (n° 7) un punto multiplo del grado $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\mu$. Sia inoltre i_{hk} il numero d'intersezioni (n° 17) del ciclo X_h col ciclo X_k ($h \neq k$; $h, k = 1, 2, \ldots, \mu$).

Assoggettiamo il piano π ad una trasformazione quadratica con un punto fondamentale in P e gli altri due A e B fuori delle tangenti in P alla curva C e a distanza finita tra loro e da P. Sia π' il piano trasformato, p' la retta fondamentale corrispondente al punto P, C' la curva irreduttibile trasformata di C ed $X'_1, X'_2, \ldots, X'_\mu$ i cicli trasformati di $X_1, X_2, \ldots, X_\mu$. Le origini dei cicli $X'_1, X'_2, \ldots, X'_\mu$ sono s punti distinti ($1 \leqq s \leqq \mu$) $P'_1, P'_2, \ldots, P'_s$ allogati sulla retta p', ma fuori dei punti fondamentali del piano π'. Denotiamo con $[\sigma'_1], [\sigma'_2], \ldots, [\sigma'_s]$ le singolarità che la curva C' ha nei punti $P'_1, P'_2, \ldots, P'_s$. Denotiamo inoltre con D_σ l'abbassamento sul genere di C prodotto dalla singolarità $[\sigma]$ (n° 10), con $D_1, D_2, \ldots, D_\mu$ gli abbassamenti sul genere prodotti dai cicli $X_1, X_2, \ldots, X_\mu$ (n° 16). Denotiamo inoltre con $D'_{\sigma_1}, D'_{\sigma_2}, \ldots, D'_{\sigma_s}$ gli abbassamenti sul genere prodotti dalle singolarità $[\sigma'_1], [\sigma'_2], \ldots, [\sigma'_s]$ e con $D'_1, D'_2, \ldots, D'_\mu$ quelli dovuti ai cicli $X'_1, X'_2, \ldots, X'_\mu$. Denotiamo inoltre con $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_\mu$ gli ordini di tali cicli.

Si ha (n° 11):

$$D_\sigma = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\mu)(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\mu - 1) + D'_{\sigma_1} + D'_{\sigma_2} + \ldots + D'_{\sigma_s}.$$

Ossia:

$$\begin{aligned} D_\sigma = {} & \tfrac{1}{2}\lambda_1(\lambda_1 - 1) + \tfrac{1}{2}\lambda_2(\lambda_2 - 1) + \ldots + \tfrac{1}{2}\lambda_\mu(\lambda_\mu - 1) \\ & + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots + \lambda_1\lambda_\mu + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \ldots \\ & \ldots + \lambda_2\lambda_\mu + \ldots + \lambda_{\mu-1}\lambda_\mu + D'_{\sigma_1} + D'_{\sigma_2} + \ldots + D'_{\sigma_s}. \end{aligned} \tag{1}$$

Sia ora i'_{hk} il numero d'intersezioni del ciclo X'_h col ciclo X'_k ($h \neq k$; h, $k = 1, 2, \ldots, \mu$). Avremo (n° 11 e n° 16):

$$\frac{1}{2}\lambda_k(\lambda_k - 1) = D_k - D'_k. \qquad (k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

Inoltre (n° 17)

$$\lambda_h \lambda_k = i_{hk} - i'_{hk}. \qquad (h \neq k;\ h, k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

Sicchè la (1) diviene:

$$(2)\quad D_\sigma = D'_{\sigma_1} + D'_{\sigma_2} + \ldots + D'_{\sigma_s} + \sum_{k=1}^{\mu}(D_k - D'_k) + \sum_{h=1,2,\ldots,\mu-1}^{h<k\leq\mu}(i_{hk} - i'_{hk}).$$

Ancora operiamo sul piano π' una trasformazione quadratica con un punto fondamentale in P'_1 e cogli altri due punti fondamentali fuori della retta p' e fuori delle tangenti in P'_1 alla curva C'. Supponiamo al solito che i punti fondamentali del piano π' siano fra loro a distanza finita e supponiamo inoltre che la retta fondamentale opposta a P'_1 non passi per alcuno dei punti P'_2, P'_3, $\ldots$, P'_s. Siano inoltre X'_1, X'_2, $\ldots$, X'_g i cicli di C' che hanno l'origine in P'_1, sicchè X'_{g+1}, X'_{g+2}, $\ldots$, X'_μ non hanno l'origine in P'_1. Sia π'' il piano trasformato, C'' la curva trasformata, p''_1 la retta fondamentale di π'', corrispondente al punto P'_1. Le singolarità $[\sigma'_2]$, ..., $[\sigma'_s]$ che C' ha nei punti P'_2, $\ldots$, P'_s si trasformano in singolarità $[\sigma''_2]$, $\ldots$, $[\sigma''_s]$ che C'' ha nei punti corrispondenti P''_2, $\ldots$, P''_s, e, denotando con D''_{σ_2}, $\ldots$, D''_{σ_s} gli abbassamenti sul genere dovuti a tali singolarità, si ha (n° 10):

$$D'_{\sigma_2} = D''_{\sigma_2}, \ \ldots, \ D'_{\sigma_s} = D''_{\sigma_s}.$$

Alla singolarità $[\sigma'_1]$ che C' ha in P'_1 corrispondono delle singolarità $[\sigma''_{11}]$, $[\sigma''_{12}]$, $\ldots$, $[\sigma''_{1t}]$ ($1 \leq t \leq g$) che la curva C'' ha in punti P''_{11}, P''_{12}, $\ldots$, P''_{1t} allogati sulla retta p''_1, ma fuori dei punti fondamentali di π''. Denotiamo con $D''_{\sigma_{11}}$, ..., $D''_{\sigma_{1t}}$ gli abbassamenti sul genere dovuti a tali singolarità (n° 10). Denotiamo inoltre con X''_1, X''_2, $\ldots$, X''_g, X''_{g+1}, $\ldots$, X''_μ i cicli corrispondenti ad

$X'_1, X'_2, \dots, X'_g, X'_{g+1}, \dots, X'_\mu$, e con $D''_1, \dots, D''_g, D''_{g+1}, \dots, D''_\mu$ gli abbassamenti sul genere (n° 16) prodotti da tali cicli.

Denotiamo inoltre con i''_{hk} il numero delle intersezioni (n° 17) di un ciclo X''_h col ciclo X''_k ($h \neq k$; $h, k = 1, 2, \dots, \mu$).

Si ha intanto, analogamente alla (2):

$$(3)\quad D'_{\sigma_1} = D''_{\sigma_{11}} + D''_{\sigma_{12}} + \dots + D''_{\sigma_{1t}} + \sum_{h=1}^{g}(D'_h - D''_h) + \sum_{h=1,2,\dots,g-1}^{h<k\leqq g}(i'_{hk} - i''_{hk}).$$

Intanto (n° 17):

$$i''_{hk} = i'_{hk} = 0 \text{ quando } h \leqq g \text{ e } k > g,$$

similmente

$$i'_{hk} = i''_{hk}, \text{ quando } h > g \text{ e } k > g.$$

Inoltre, come abbiam visto,

$$D'_{\sigma_2} = D''_{\sigma_2}, \dots, D'_{\sigma_s} = D''_{\sigma_s},$$

e similmente (n[i] 10 e 16)

$$D''_{g+1} = D'_{g+1}, \dots, D''_\mu = D'_\mu.$$

Sicchè, ponendo:

$$\Delta'_\sigma = D'_{\sigma_1} + D'_{\sigma_2} + \dots + D'_{\sigma_s}$$

e

$$\Delta''_\sigma = D''_{\sigma_{11}} + D''_{\sigma_{12}} + \dots + D''_{\sigma_{1t}} + D''_{\sigma_2} + \dots + D''_{\sigma_s},$$

tenendo conto delle precedenti uguaglianze e della (3), la (2) diviene:

$$(4)\qquad D_\sigma = \Delta''_\sigma + \sum_{h=1}^{\mu}(D_h - D''_h) + \sum_{h=1,2,\dots,\mu-1}^{h<k\leqq\mu}(i_{hk} - i''_{hk}).$$

Dopo ν trasformazioni quadratiche, denotando con $\Delta^{(\nu)}_\sigma$ la somma

degli abbassamenti sul genere prodotti dalle singolarità in cui s'è decomposta la $[\sigma]$ (n° 10), con $D_h^{(\nu)}$ l'abbassamento sul genere (n° 16) prodotto dal ciclo $X_h^{(\nu)}$ $(h = 1, 2, \ldots, \mu)$, trasformato di X_h, con $i_{hk}^{(\nu)}$ le intersezioni (n° 17) dei cicli trasformati di X_h, X_k $(k \neq h)$, si avrà, come la (4):

$$(5) \qquad D_\sigma = \Delta_\sigma^{(\nu)} + \sum_{h=1}^{\mu}(D_h - D_h^{(\nu)}) + \sum_{h=1,2,\ldots,\mu-1}^{h<k\leq\mu}(i_{hk} - i_{hk}^{(\nu)}).$$

Ora, se colla ν^{esima} trasformazione si è ottenuto che i cicli trasformati $X_1, X_2, \ldots, X_\mu$ abbiano le origini distinte (come si può sempre fare, in virtù della dimostrazione data al n° 17), avremo $\Delta_\sigma^{(\nu)} = \sum_{h=1}^{\mu} D_h^{(\nu)}$, $i_{hk}^{(\nu)} = 0$ $(h \neq k;\ h, k = 1, 2, \ldots, \mu)$, e la (5) diviene

$$(6) \qquad D_\sigma = \sum_{h=1}^{\mu} D_h + \sum_{h=1,2,\ldots,\mu-1}^{h<k\leq\mu} i_{hk}.$$

Si ha quindi il seguente teorema:

Se su una curva piana C si ha una singolarità $[\sigma]$ *in un punto P, ed* $X_1, X_2, \ldots, X_\mu$ *sono i cicli di C uscenti da P* (n° 2), *l'abbassamento sul genere prodotto dalla singolarità* $[\sigma]$ (n° 10) *è uguale alla somma degli abbassamenti prodotti dai cicli dati* (n° 16) *aumentata della somma dei numeri d'intersezioni che i cicli dati hanno due a due* (n° 17).

19. Giunti a tal punto, possiamo definire che cosa debba intendersi per curve dotate d'una stessa singolarità in un punto dato (*).

Siano C, C' due curve passanti comunque per un punto P. Supporremo che si possa far corrispondere ad ogni ciclo di C coll'origine in P un ciclo di C' coll'origine in P, e viceversa; in modo che un ciclo di C ed il corrispondente di C' abbiano le stesse caratteristiche e siano atti a definire un fascio di cicli della stessa natura (n° 15). *Sup-*

(*) Noi faremo ciò in guisa da abbracciare in tutti i sensi la nozione geometrica di curve dotate di una stessa singolarità, della quale finora hanno fatto uso i geometri.

porremo inoltre che le trasformazioni quadratiche che servono a staccare le origini di due qualunque cicli diversi di C (n° 17) *stacchino contemporaneamente le origini dei cicli corrispondenti di C′ e viceversa.*

In tal caso noi diremo che le due curve C, C′ hanno la stessa singolarità nel punto P, in senso astratto.

Diremo poi che C e C′ hanno in P la stessa singolarità rispetto ad un ciclo Z (non appartenente nè a *C* nè a *C′*), *quando esse hanno in P la stessa singolarità in senso astratto, ed inoltre il numero delle intersezioni di un ciclo qualunque di C, uscente da P, col ciclo Z uguagli quello delle intersezioni del ciclo corrispondente di C′ col ciclo Z.*

Finalmente diremo che due curve C, C′ hanno in P la stessa singolarità rispetto ad una curva Γ (diversa da esse), *quando hanno in P la stessa singolarità rispetto ad ogni ciclo di Γ uscente da P.*

Date queste definizioni risulta immediata questa proposizione:

Tutte le curve del piano π, dello stesso ordine n, dotate in uno stesso punto d'una stessa singolarità (in senso astratto o rispetto ad un ciclo o a più cicli) *costituiscono* (*quando esistono*) *un sistema lineare.*

Viceversa:

Le curve (*generiche*) *d'uno stesso sistema lineare avente in P un punto base hanno ivi la stessa singolarità* (*in senso astratto*).

Inoltre, per la proposizione del n° 18:

Se due curve irreduttibili hanno in uno stesso punto P le stesse singolarità, gli abbassamenti sul genere (n° 10) *dovuti a tali singolarità sono uguali* (e quindi sono uguali gli abbassamenti sulla classe, sul numero dei flessi, dei punti sestatici, etc., etc.).

20. Similmente diremo che *due curve C, C′ hanno in due punti P, P′* (distinti o coincidenti) *singolarità simili*, quando ad ogni ciclo di *C*, uscente da *P*, si può far corrispondere un ciclo di *C′*, uscente da *P′*, colle stesse caratteristiche, e viceversa; e quando inoltre il numero delle intersezioni (n° 17) di due cicli qualunque di *C*, uscenti da *P*, uguaglia quello dei cicli corrispondenti di *C′*.

Per il n° 18:

Due singolarità simili producono uguali abbassamenti sul genere.

È da osservare che, se due curve hanno in uno stesso punto

una stessa singolarità, hanno ivi conseguentemente due singolarità simili, ma non è vero il reciproco. Per esempio, due curve che abbiano nello stesso punto due cuspidi ordinarie (cicli isolati di 2° ordine e 1ª classe) hanno ivi singolarità simili, ma, affinchè abbiano la stessa singolarità, in senso astratto, è necessario e sufficiente che abbiano la stessa tangente cuspidale; etc. etc.

Palermo, 28 febbrajo 1897.

MICHELE DE FRANCHIS.

ERRATA-CORRIGE

A pag. 116, linea 10 tolgasi il periodo:

Supponiamo che il fascio (K) sechi la curva C secondo una serie lineare g^1_ν (n° 1).

UNA QUESTIONE SUI NUMERI TRANSFINITI.

Nota di G. Burali-Forti, in Torino.

Adunanza del 28 marzo 1897.

Scopo principale di questa Nota è di dimostrare, che effettivamente esistono dei *numeri transfiniti* (*) (o *tipi d'ordine*) *a*, *b* tali che, *a* non è eguale, non è minore e non è maggiore di *b*.

Basandoci su resultati già noti, potremmo in poche parole dimostrare quanto ora abbiamo affermato; ma per togliere al lettore ogni dubbio sulla validità della nostra dimostrazione, abbiamo creduto necessario stabilire esattamente (nei §§ 1-8) il significato dei termini dei quali facciamo uso (**), ripetendo—sebbene sotto forma alquanto diversa—alcune cose già esposte in questi Rendiconti (***).

(*) G. Cantor. — Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Math. Ann., B. 47). — Traduzione italiana nella *Rivista di Matematica*, a. 1895. Per i lavori precedenti del sig. G. Cantor sullo stesso argomento, si consulti la *Lista bibliografica* del sig. Vivanti, unita alla parte VI del *Formulario* pubblicato dalla *Rivista di Matematica*.

(**) Per il significato dei termini, *classe, corrispondenza, classe finita*,... rimandiamo il lettore alla nostra Nota: « Le classi finite » pubblicata negli Atti dell'Accademia di Torino, a. 1896.

(***) Tomo VIII. — « Sulle classi ordinate e i numeri transfiniti ».

§ 1. *Ordine degli elementi di una classe.* — Sia u una classe. Diciamo che h è un « ordine degli u », quando (*):

(a) h è una corrispondenza fra gli elementi di u e classi formate con elementi di u.

(b) La corrispondenza h è *transitiva;* cioè se x, y, z sono elementi di u, se x è un elemento della classe hy e se y è un hz, allora x è un hz.

(c) Se x, y sono elementi di u, non può, ad un tempo, essere x un hy e essere y un hx.

(d) Se x, y sono elementi qualunque di u, sempre si ha che: o x è identico a y, o x è un hy, o y è un hx.

In simboli, scrivendo Ord u al posto di « ordine degli u », abbiamo

1. $u \varepsilon \mathrm{K} . \supset . \mathrm{Ord}\, u = (\mathrm{K}\, u) \mathrm{f} u \frown \overline{h \varepsilon} \{ x, y, z \varepsilon u \,.\, x \varepsilon hy \,.\, y \varepsilon hz \,. \supset_{x,y,z} .$ $x \varepsilon hz \,.\!\cdot\!. \, x, y \varepsilon u \,.\, x \varepsilon hy \,.\, y \varepsilon hx \,. =_{x,y} \Lambda \,.\!\cdot\!.\, x, y \varepsilon u \,. \supset_{x,y} : x = y \,. \smile .\, x \varepsilon hy .$ $\smile .\, y \varepsilon hx \}$ (Def).

Se, essendo x un elemento di u, chiamiamo « seguenti di x in u rispetto all'ordine h » gli elementi della classe hx, scorgiamo facilmente che le proprietà (a)—(d) attribuite ad h, sono quelle che ordinariamente si annettono all'idea di *ordine.*

Invertiamo la relazione $y \varepsilon hx$ (y è uno dei seguenti di x) scrivendo $x \varepsilon h|y$, e quindi $h|y$ può stare al posto di « precedenti di y in u rispetto all'ordine h ». Chiamiamo « *primo* degli u, rispetto all'ordine h » l'elemento x di u che non ha precedenti ($h|x = \Lambda$), e chiamiamo « *ultimo* degli u rispetto all'ordine h » l'elemento y di u che non ha seguenti ($hy = \Lambda$). Se x è un elemento di u, chiamiamo « *immediatamente seguente* di x » l'elemento y di u che è uno dei seguenti x ed è tale, che non esistono degli u che sono, ad un tempo, seguenti di x e precedenti di y ($y \varepsilon hx \,.\, u \frown hx \frown h|y = \Lambda$). Il primo o l'ultimo degli u, o l'immediatamente seguente di un elemento qualunque di u, può non esistere; ma se esiste è univocamente determinato [ciò risulta facilmente dalle condizioni (a) — (d)].

(*) Per maggiori schiarimenti sulle cose contenute nei §§ 1-8 si consulti: C. Burali-Forti.—*Sulle classi ordinate e i numeri transfiniti*, loc. cit.

§ 2. *Classe ordinata* (*). — Sieno u, v classi qualunque; sia h un ordine degli u, e k un ordine dei v. Scriviamo (u, h) al posto di « classe u i cui elementi sono disposti nell'ordine h », o al posto di « classe u ordinata col criterio h ».

Non sembra attualmente possibile definire (u, h) ponendo (u, h) eguale (*identico*) a un complesso di segni avente significato noto. Noi definiamo (u, h) come *ente astratto*, stabilendo in qual caso due classi ordinate debbano ritenersi identiche. Poniamo

2. $u, v \varepsilon \mathrm{K} \,.\, h \varepsilon \mathrm{Ord}\, u \,.\, k \varepsilon \mathrm{Ord}\, v \,.\, \supset .\!\cdot . (u, h) = (v, k) \,. =: u = v \,.$
$h = k$ (Def)

cioè ammettiamo che (u, h) è identica a (v, k) quando, u è identica a v e la corrispondenza h è identica alla corrispondenza k.

Se u è una classe contenente un solo elemento x, ($u \varepsilon \mathrm{Un}$), allora ogni ordine h degli u è tale che $hx = \Lambda$. Possiamo quindi convenire di indicare col segno Λ ogni ordine di u, e in conseguenza (u, Λ) rappresenterà la classe u ordinata.

Scrivendo Ko al posto di « classe ordinata » poniamo

3. $\mathrm{Ko} = \overline{(u, h)\varepsilon}\{u \varepsilon \mathrm{K} \,.\, h \varepsilon \mathrm{Ord}\, u\}$ (Def)

cioè diciamo che (u, h) è una classe ordinata quando u è una classe e h è un ordine degli u.

§ 3. *Classe perfettamente ordinata.*—Sia u una classe non nulla (contenente effettivamente degli elementi) e sia h un ordine degli u.

Diciamo che (u, h) è una « classe *perfettamente ordinata* », quando:

(a) Esiste un elemento di u che, rispetto all'ordine h, occupa il primo posto.

(b) Ogni elemento di u che ha dei seguenti, ha l'immediatamente seguente.

(*) G. Cantor, loc. cit. « Chiamiamo semplicemente ordinato un insieme M, quando fra i suoi elementi sussiste un determinato ordine di posto (Rangndung) per cui considerando due elementi qualunque m_1, m_2 l'uno prende il posto *inferiore* e l'altro prende il posto *superiore* e ciò in tal guisa che, se di tre elementi m_1, m_2 e m_3 è, per il posto, m_1 inferiore ad m_2 ed m_2 inferiore ad m_3, anche m_1 è, per il posto, inferiore ad m_3 ».

(*c*) Qualunque sia l'elemento x di u si ha che: o x non ha l'immediatamente precedente; o esiste un precedente y di x, non avente l'immediatamente precedente, tale che gli u che sono, ad un tempo, seguenti di y e precedenti di x, formano una *classe finita*.

In simboli, scrivendo Kpo al posto di « classe perfettamente ordinata », si ha

$$4.\ \mathrm{Kpo} = \mathrm{Ko} \frown \overline{(u,\, h)\,\varepsilon}\,\big|\, u \mathrel{-}= \Lambda \mathrel{:\cdot:} x\,\varepsilon\,u \,.\, h|x = \Lambda \mathrel{-}=_x \Lambda \mathrel{:\cdot:}$$
$$x\,\varepsilon\,u \,.\, hx \mathrel{-}= \Lambda \,.\, \supset_x : y\,\varepsilon\,hx \,.\, u \frown hx \frown h|y = \Lambda \,.\mathrel{-}=_y \Lambda \mathrel{:\cdot:} x\,\varepsilon\,u \,.\, \supset_x ::$$
$$y\,\varepsilon\,h|x . u \frown hy \frown h|x = \Lambda \,.\, =_y \Lambda \mathrel{.\cdot.} \smile \mathrel{.\cdot.} y\,\varepsilon\,h|x : m\,\varepsilon\,h|y . u \frown hm \frown h|y = \Lambda .$$
$$=_m \Lambda : (u \frown hy \frown h|x)\,\varepsilon\,\mathrm{Kfin} : \mathrel{-}=_y \Lambda\,\big|\ (*) \qquad \text{(Def).}$$

Il sig. G. Cantor chiama « classe *ben ordinata* », quella classe ordinata che sodisfa alle condizioni (*a*), (*b*). Avvi notevole differenza tra la classe ben ordinata e la classe perfettamente ordinata: sieno, p. es., $a_1, a_2, a_3, \ldots b_1, b_2, b_3, \ldots$, gli elementi di due classi numerabili; se consideriamo la classe ordinata

$$a_1, a_2, a_3, \ldots b_3, b_2, b_1$$

si vede facilmente che essa è classe ben ordinata ma non perfettamente ordinata, mentre

$$a_1, a_2, a_3, \ldots b_1, b_2, b_3, \ldots$$

è classe perfettamente ordinata e, in conseguenza, anche bene ordinata.

§ 4. *Relazioni tra classi ordinate.* — Sieno (u, h), (v, k) classi ordinate. Scriviamo $(v, k)\,\mathrm{f}(u, h)$ al posto di « corrispondenza ordinata tra gli u e i v ordinati con i criteri h, k ». Diciamo che f è una di tali corrispondenze quando: f è una corrispondenza *univoca*

(*) La definizione che ora abbiamo data, si presenta sotto una forma simbolica alquanto complicata perchè non abbiamo voluto introdurre dei segni per indicare, *immediatamente precedente* o *seguente* di x, *primo* o *ultimo* degli u, ecc. Tali segni sarà conveniente introdurre volendo trattare completamente la teoria delle classi ordinate.

e reciproca tra gli u e i v; ed è tale che se x, y sono elementi di u e x è uno dei seguenti rispetto ad h di y, allora anche fx è uno dei seguenti rispetto a k di fy. In simboli si ha:

5. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} \,.\supset.\, (v, k)\,\mathrm{f}\,(u, h) = (v\,\mathrm{f}\,u)\,\mathrm{rep} \frown \overline{f\varepsilon}\,\{x, y \varepsilon u \,.\, x \varepsilon h y \,.\supset_{x,y}.\, fx \varepsilon k(fy)\}$. (Def).

Diciamo che (u, h) è *equivalente* (*) a (v, k) e scriviamo $(u, h) \backsim (v, k)$ quando tra (u, h) e (v, k) si può stabilire una corrispondenza ordinata. Diciamo che (u, h) è *minore* di (v, k), e scriviamo $(u, h) < (v, k)$, quando esiste una classe w contenuta in v e tale che $(u, h) \backsim (w, k)$ (**). In simboli abbiamo:

6. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} \,.\supset:\, (u, h) \backsim (v, k) \,.=.\, (v, k)\mathrm{f}(u, h) -= \Lambda$. (Def)

7. $\ldots\ldots \,.\supset\because\, (u,h) < (v,k) \,.=:\, w \varepsilon \mathrm{K}v \,.\, (u,h) \backsim (w,k) \,.-=_w \Lambda$ (Def).

Dalle prop. 6, 7 si deducono facilmente le seguenti

$$(u, h), (v, k), (w, l) \varepsilon \mathrm{Ko} \,.\supset\because$$

8. $(u, h) \backsim (u, h)$
9. $(u, h) \backsim (v, k) \,.=.\, (v, k) \backsim (u, h)$
10. $(u, h) \backsim (v, k) \,.\, (v, k) \backsim (w, l) \,.\supset.\, (u, h) \backsim (w, l)$
11. $(u, h) \backsim (v, k) \,.\supset.\, (u, h) < (v, k)$
12. $(u, h) \backsim (v, k) \,.\, (v, k) < (w, l) \,.\supset.\, (u, h) < (w, l)$
13. $(u, h) < (v, k) \,.\, (v, k) < (w, l) \,.\supset.\, (u, h) < (w, l)$
14. $(u, h) \backsim (v, k) \,.\supset.\, u \backsim v$
15. $(u, h) < (v, k) \,.\supset.\, u < v$ (***).

§ 5. *Operazione* S. — Sieno (u, h), (v, k) classi ordinate tali che u, v non abbiano elementi a comune. Col simbolo $(u, h)\,\mathrm{S}\,(v, k)$, che leggeremo « classe ordinata (u, h) *seguìta* dalla classe ordinata (v, k) » indicheremo la classe $u \smile v$ (somma logica di u con v)

(*) Il sig. Cantor chiama *simili* (ähnlich) le due classi. Noi conserviamo il termine equivalenti, poichè essendo questo stato definito per due classi (Cfr: « Classi finite », l. c.) è attualmente privo di significato per due classi ordinate. Lo stesso dicasi per il segno $<$ da noi introdotte sulle « Classi finite ».

(**) Si osservi che ogni ordine dei v è pure un ordine di ogni classe contenuta in v, (§ 1); quindi, se w è una parte di v si ha che (w, k) è pure una classe ordinata.

(***) Cfr. « Classi finite », l. c.

ordinata con un criterio l tale che, essendo x, y elementi di $u \smile v$, l'affermazione $x \varepsilon l y$ equivalga a dire che: o x, y sono elementi di u e $x \varepsilon h y$, o x, y sono elementi di v e $x \varepsilon k y$, o x è un v e y è un u. In simboli si ha

16. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} \,.\, u \frown v = \Lambda \,.\, \supset \,.\, (u, h) \mathrm{S} (v, k) =$
$\overline{\iota} [\overline{(u \smile v, l) \varepsilon} \{ l \varepsilon \mathrm{Ord}(u \smile v) :.: x, y \varepsilon (u \smile v) \,.\, \supset_{x,y} :: x \varepsilon l y \,.=.\!\cdot\!.\, x, y \varepsilon u \,.$
$x \varepsilon h y : \smile : x, y \varepsilon v \,.\, x \varepsilon k y : \smile : x \varepsilon v \,.\, y \varepsilon u \}]$ (Def).

Si dimostra assai facilmente che $(u, h) \mathrm{S} (v, k)$ è una classe ordinata univocamente determinata. Analogamente si ha che

17. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Kpo} \,.\, u \frown v = \Lambda \,.\, \supset \,.\, (u, h) \mathrm{S} (v, k) \varepsilon \mathrm{Kpo}$.

§ 6. *Tipo d'ordine.*—Se (u, h) è una classe ordinata, scriviamo $\mathrm{T}'(u, h)$ al posto di « tipo d'ordine degli u ordinati col criterio h ». Consideriamo il $\mathrm{T}'(u, h)$ come un *ente astratto* funzione di (u, h), che (u, h) ha a comune con tutte le classi ordinate ad essa equivalenti; vale a dire poniamo

18. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} . \supset : \mathrm{T}'(u, h) = \mathrm{T}'(v, k) . = . (u, h) \backsim (v, k)$ (Def).

Scrivendo T al posto di « tipo d'ordine », poniamo:

19. $\mathrm{T} = \overline{x \varepsilon} \{ (u, h) \varepsilon \mathrm{Ko} \,.\, x = \mathrm{T}'(u, h) \,.\, - =_{(u,h)} \Lambda \}$ (Def).

Dalle proposizioni 8, 9, 10 risulta subito che per i tipi d'ordine, l'eguaglianza definita dalla prop. 18, gode delle proprietà, *riflessiva, simmetrica* e *transitiva;* che cioè, se a, b sono tipi d'ordine qualunque, si ha

$$a = a; \quad a = b \,.=.\, b = a; \quad a = b \,.\, b = c \,.\, \supset \,.\, a = c.$$

§ 7. *Maggiori e minori.* — Sieno (u, h), (v, k) classi ordinate. Diciamo che il $\mathrm{T}'(u, h)$ è *minore* del $\mathrm{T}'(v, k)$, o che il $\mathrm{T}'(v, k)$ è *maggiore* del $\mathrm{T}'(u, h)$, e scriviamo

$$\mathrm{T}'(u, h) < \mathrm{T}'(v, k), \quad \text{o}, \quad \mathrm{T}'(v, k) > \mathrm{T}'(u, h)$$

quando: esiste una parte v_1 di v tale che $(u, h) \backsim (v_1, k)$; ma non esiste una parte u_1 di u tale che $(u_1, h) \backsim (v, k)$. In virtù della prop. 7 si ha che

20. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} . \supset .\because . \mathrm{T}'(u, h) < \mathrm{T}'(v, k) : = : \mathrm{T}'(v, k) > \mathrm{T}'(u, h) : = : (u, h) < (v, k) . (v, k) -< (u, h).$ (Def)

Si hanno le prop. seguenti:

$a, b, c \varepsilon \mathrm{T} . \supset :$

21. $a = b . a < b . = . \Lambda$

22. $a < b . a > b . = . \Lambda$

23. $a = b . b < c . \supset . a < c$

24. $a < b . b < c . \supset . a < c.$

Le prop. 21, 22 esprimono che dei tre casi $a = b$, $a > b$, $a < b$ non possono verificarsene due ad un tempo; esse sono immediate conseguenze delle prop. del § 4. Delle stesse prop. è pure immediata conseguenza la prop. 23. Dimostriamo ora la prop. 24.—Sieno (u, h), (v, k), (w, l) classi ordinate. Dalla prop. 13 abbiamo che

$(u, h) < (v, k) . (v, k) < (w, l) . (w, l) < (u, h) . \supset : (v, k) < (u, h) . \smile . (w, l) < (v, k)$ (*);

trasportando nell'ipotesi i due termini della tesi e trasportando nella tesi il terzo fattore dell'ipotesi si ha,

$(u, h) < (v, k) . (v, k) -< (u, h) . (v, k) < (w, l) . (w, l) -< (v, k) . \supset . (w, l) -< (u, h);$

unendo alla tesi il fattore $(u, h) < (w, l)$, che è conseguenza dell'ipotesi, e ricordando la prop. 20, si ha la prop. 24.

Non ci è però possibile dimostrare che:

A. $a, b \varepsilon \mathrm{T} . \supset : a = b . \smile . a < b . \smile . a > b,$

che cioè, per due tipi d'ordine qualunque debba sempre verificarsi uno dei tre casi $a = b$, $a < b$, $a > b$. Operando come nella nostra Nota « Sopra un teorema del sig. G. Cantor » (**), riduciamo la prop. *A* al prodotto logico delle due seguenti:

I. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} . \supset : (u, h) < (v, k) . \smile . (v, k) < (u, h)$

II. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} . (u, h) < (v, k) . (v, k) < (u, h) . \supset . (u, h) \backsim (v, k).$

Se per un momento ammettiamo vera la prop. *A*, o almeno la II, dalla prop. 20 si deduce dopo semplici trasformazioni logiche che:

(*) Perchè se a, b, c sono proposizioni si ha che $b . \supset . b \smile c$ e quindi, $a \supset b . \supset : a . \supset . b \smile c.$

(**) Atti Acc. Scienze. Torino, a. 1896.

$B.\ (u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} . \supset .\because . \mathrm{T}'(u, h) < \mathrm{T}'(v, k) . = :(u, h) < (v, k) .$
$(u, h) - \backsim (v, k)$;
cioè che: il $\mathrm{T}'(u, h)$ è minore del $T'(u, h)$, quando questi non sono eguali ed esiste una parte v_1 di v tale che $(u, h) \backsim (v_1, k)$. È sotto questa forma che il sig. Cantor (*) dà la definizione della relazione contenente il segno $<$. La nostra prop. 20 e la B sono equivalenti quando sussista la A, o almeno la II. Assumendo la B per definizione non sapremmo, senza ammettere la II, come dimostrare la prop. 24.

Dalla prop. 20 e dalla B si deduce assai facilmente che

$C.\ (u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} . (u, h) < (v, k) . \supset . \mathrm{T}'(u, h) \overset{=}{<} \mathrm{T}'(v, k).$

§ 8. *Numeri ordinali e somma.*—Diciamo « numero ordinale » (**), e scriviamo No, al posto di « tipo d'ordine di classe perfettamente ordinata »;

25. $\mathrm{No} = \mathrm{T}'\mathrm{Kpo}.$ (Def)

Poniamo

26. $1 = \iota \mathrm{T}' \{ \mathrm{Ko} \frown \overline{(u, h) \varepsilon} (u \, \varepsilon \, \mathrm{Un}) \}$ (Def)

cioè diciamo *uno* il tipo d'ordine delle classi ordinate (u, h) tali che u contiene un solo elemento. Risulta subito che

27. $1 \, \varepsilon \, \mathrm{No}.$

Definiamo la somma di due tipi d'ordine, e quindi anche di due numeri ordinali, ponendo

28. $(u, h), (v, k) \varepsilon \mathrm{Ko} . u \frown v = \Lambda . \supset . \mathrm{T}'(u, h) + \mathrm{T}'(v, k) = \mathrm{T}' \{ (u, h) \mathrm{S} (v, k) \}.$ (Def)

Osservando che due classi ordinate equivalenti seguite da una stessa classe, sono pure equivalenti, risulta che la somma ora definita è indipendente da u, v, h, k; di più dalla prop. 17 risulta

---

(*) *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten.* Zeitschr. für Phil., t. 91, 92.

(**) Il sig. Cantor dice veramente *numero ordinale* al posto di « tipo d'ordine di una classe ben ordinata ». La proprietà dei nostri numeri ordinali ci sembra concordino però con quelle dei numeri ordinali del sig. Cantor. Del resto ciò ha nessuna influenza sulle nostre conclusioni, per le quali basta sia provato che i nostri T sono precisamente i tipi d'ordine del sig. Cantor.

29. $a, b \varepsilon \mathrm{No} . \supset . a + b \varepsilon \mathrm{No}$

e la stessa prop. sussiste se al posto di No poniamo T (*).

§ 9. *Conseguenze della proposizione A.* — Ammettiamo ora vera la prop. *A* e vediamo quali proposizioni si deducono logicamente da essa.

30. $a \varepsilon \mathrm{No} . \supset . a + 1 > a.$ (A)

Dim. Sia (u,h) una classe perfettamente ordinata avente a per numero ordinale e sia v una classe contenente un solo elemento. Se poniamo

$$P = (u, h), \quad Q = (u, h) \mathrm{S} (v, \Lambda)$$

si ha che $P < Q$. La prop. 30 sarà dimostrata quando, in virtù della prop. *B*, riusciremo a dimostrare che $P - \backsim Q$. Se P non ha un ultimo elemento, allora $P - \backsim Q$ perchè Q ha un ultimo elemento che è $\overline{\iota} v$. Se P ha un ultimo elemento x, allora esiste (§ 3) un elemento y di u che non ha l'immediatamente precedente e tale che, gli $(u \frown hy) \smile \iota y$ formano una classe finita di n elementi; allora, se $P \backsim Q$, sono anche equivalenti le classi P_1, Q_1 che si ottengono da P, Q sopprimendo gli ultimi n elementi; ma ciò è assurdo perchè P_1 non ha ultimo elemento e Q_1 ha y per ultimo elemento (**). Dunque $P - \backsim Q$ e, in conseguenza, sussiste la prop. 30. Si osservi che la prop. 30 non è vera in generale se, secondo il sig. Cantor, si chiama numero ordinale, il tipo d'ordine di una classe ben ordinata, come si deduce subito dall'esempio portato alla fine del § 3.

31. $a \varepsilon \mathrm{No} . \supset : x \varepsilon \mathrm{No} . a < x . x < a + 1 . =_x \Lambda$ (A)

Questa proposizione—che esprime non esistere un numero ordinale compreso fra a e $a+1$ — è facile conseguenza della prop. *C*.

Se a è un numero ordinale, possiamo indicare con $\overline{\varepsilon} > a$ i numeri ordinali maggiori di a, perchè la relazione $x > a$ equivale alla

---

(*) Si intende che bisogna sia ammessa l'esistenza di almeno una classe infinita. (Cfr. Classi finite, l. c.). Del resto se non esistono classi infinite allora i *tipi d'ordine* sono i *numeri interi*.

(**) Si intende che qui facciamo uso del *principio di induzione completa*, da noi dimostrato nella nostra Nota « Le classi finite ».

relazione $x \varepsilon (\bar{\varepsilon} >) a$. In conseguenza, se $\bar{\varepsilon} >$ è un criterio d'ordine per i numeri ordinali, allora $(\mathrm{No}, \bar{\varepsilon} >)$ indica la classe dei numeri ordinali ordinati in senso crescente.

Noi vogliamo ora dimostrare che

32. $(\mathrm{No}, \bar{\varepsilon} >) \varepsilon \mathrm{Kpo}$ (*A*).

Dim. Intanto $(\mathrm{No}, \bar{\varepsilon} >)$ è classe ordinata perchè le condizioni (*b*), (*c*) del § 1 sussistono in virtù delle prop. 24, 21 e 22; la condizione (*d*) equivale alla prop. *A*.—Le prop. 27, 30, 31 dimostrano che le condizioni (*a*), (*b*) del § 3 sono verificate per la classe ordinata $(\mathrm{No}, \bar{\varepsilon} >)$. Sia ora (u, h) una classe perfettamente ordinata il cui numero ordinale è a; sodisfacendo (u, h) alla condizione (*c*) del § 3 si ha che: o a non ha l'immediatamente precedente (si intende nel criterio $\bar{\varepsilon} >$), o esiste un numero ordinale x minore di a, non avente l'immediatamente precedente, e tale, che ripetendo su x un numero finito di volte l'operazione $+1$ si trova a. Dunque $(\mathrm{No}, \bar{\varepsilon} >)$ sodisfa anche alla condizione (*c*) del § 3.

Essendo $(\mathrm{No}, \bar{\varepsilon} >)$ classe perfettamente ordinata, possiamo porre

33. $\Omega = \mathrm{T}'(\mathrm{No}, \bar{\varepsilon} >)$ (Def)

e si ha che

34. $\Omega \, \varepsilon \, \mathrm{No}$. (*A*)

Si può ora dimostrare che

35. $a \, \varepsilon \, \mathrm{No} \,.\, \supset \,.\, a \overline{\overline{<}} \Omega$ (*A*).

Dim. Sia (u, h) una classe perfettamente ordinata avente a per numero ordinale. Sia (v, k) la classe ordinata ottenuta con le leggi seguenti: qualunque sia l'elemento x di u, la classe $u \frown - hx$ sia un elemento di v, e v non abbia che di tali elementi (v risulta dunque, classe di classi); se x, y sono elementi di u e $x \varepsilon hy$ si abbia che $(u \frown - hx) \varepsilon k (u \frown - hy)$.

Risulta subito che $(u, h) \backsim (v, k)$ e quindi (v, k) è classe perfettamente ordinata il cui numero ordinale è a. Si ha pure facilmente, dalle proposizioni precedenti, che la classe dei numeri ordinali degli elementi di v, ordinata col criterio k, è una classe di numeri ordinali minori di a, perfettamente ordinata in senso crescente ed avente a per numero ordinale; ma tale classe è minore di $(\mathrm{No}, \bar{\varepsilon} >)$ e quindi dalla prop. *C* risulta la prop. 35.

§ 10. *Conclusione.*—Se nella prop. 30 poniamo Ω al posto di a e nella prop. 35 poniamo $\Omega + 1$ al posto di a, abbiamo, in virtù delle prop. 34, 26, 29,

$$\Omega + 1 > \Omega; \quad \Omega + 1 \overline{<} \Omega$$

che, per le prop. 21, 22, risultano contradittorie.

Ammettendo dunque la prop. A, siamo giunti ad un assurdo, e quindi risulta rigorosamente dimostrato, che esistono almeno due tipi d'ordine a, b (e ne esistono certamente tra i numeri ordinali) tali che a non è eguale, non è maggiore e non è minore di b.

Risulta dunque impossibile ordinare i tipi d'ordine in generale, e in particolare anche i numeri ordinali, in senso crescente: vale a dire; i tipi d'ordine non possono fornire per le classi ordinate una classe *campione*, come per le classi finite e numerabili la fornisce la classe dei numeri interi ordinata in senso crescente (*). Ci sembra che così uno dei più importanti scopi dei tipi d'ordine venga necessariamente a mancare.

Torino, febbrajo 1897.

C. BURALI-FORTI.

(*) Nemmeno la classe dei tipi d'ordine che non sono numeri ordinali, può fornire la classe ordinata campione per le classi ordinate non perfettamente ordinate. Si può infatti dimostrare assai facilmente che per i T$-$No, o non è vera la prop. A, o non è vera la proposizione seguente: « Data una Ko$-$Kpo esistono due T$-$No x, y tali, che i tipi d'ordine non minori di x e non maggiori di y ordinati in senso crescente, formano una classe ordinata equivalente a quella data ». Si capisce che questa prop. è necessario sia verificata insieme alla A, affinchè la classe dei T$-$No possa essere una classe campione per le Ko$-$Kpo.

SULLE SERIE PROCEDENTI SECONDO LE DERIVATE SUCCESSIVE DI UNA FUNZIONE.

Nota del prof. **S. Pincherle**, in Bologna.

Adunanza dell'11 aprile 1897.

Le serie ordinate secondo le derivate successive di una funzione presentano un speciale interesse, per il fatto che esse possono servire alla rappresentazione analitica di ogni operazione distributiva, come ho dimostrato in un recente lavoro (*). Queste serie presentano sulle altre rappresentazioni analitiche delle operazioni distributive, in particolare sulle espressioni di esse mediante integrali definiti semplici o multipli, il vantaggio di non contenere elementi arbitrari quali le linee di integrazione; inoltre i calcoli su quelle serie, dove ne sia verificata la convergenza, presentano una grande semplicità ed una notevole analogia coi calcoli sulle ordinarie serie di potenze (**).

La presente Nota si divide in due parti. Nella prima, si dà una condizione generale relativa alla convergenza delle serie ordinate se-

(*) *Sulle operazioni funzionali distributive.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, febbraio 1895.

(**) Vedi la Nota: *Della validità effettiva di alcuni sviluppi in serie di funzioni*, ibid., gennaio 1896.

condo le derivate successive di una funzione; nella seconda, si considera una classe particolare di tali serie, e cioè quelle che—per la relazione fra i loro coefficienti—si possono dire ricorrenti; tali serie presentano analogia colle ordinarie serie ricorrenti dell'algebra, ed è facile di esprimere in termini finiti l'operazione funzionale che esse rappresentano.

I. — *Condizioni di convergenza.*

1. Indichiamo con T una porzione semplicemente connessa qualunque del piano della variabile complessa x (o di una riemanniana ad un numero qualsivoglia di fogli e che sia stata resa semplicemente connessa mediante un numero opportuno di tagli). Sia $\rho(x)$ una funzione—nel senso generale della parola—dei punti di questo campo; questa funzione sia in T ad un valore, continua, finita, reale e positiva. Sia poi $\alpha_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) una successione data di funzioni analitiche regolari in T e che per ogni valore di x preso in questo campo soddisfino alla disuguaglianza

$$|\alpha_n(x)| < \rho^n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Con questa successione di funzioni costruiamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)}{n!} \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}, \tag{a}$$

essendo $\varphi(x)$ una funzione analitica regolare in una porzione T_1 di T; vogliamo mostrare come si possa determinare un'area in T_1, pei punti della quale la serie (a) sia convergente assolutamente ed uniformemente.

2. A questo effetto, definiamo la seguente funzione ad un valore, reale e positiva dei punti di T_1. Se rappresentiamo con (c) l'insieme dei punti del contorno di T_1 (contorno che può constare di un sistema qualunque di linee e punti), ad ogni punto x dell'interno di T_1 corrisponde un limite inferiore per le distanze di x da (c); questo limite inferiore si indicherà con $\delta(x)$.

Si scorge subito come $\delta(x)$ sia una funzione perfettamente determinata per ogni punto x di T_1; come essa sia reale e positiva entro a T_1; come sia nulla al contorno; come raggiunga un massimo in uno o più punti o in linee—ma non in aree—nell'interno di T_1; come infine, descrivendo da un punto x_0 interno a T_1 il cerchio (x_0, r) (*) tutto contenuto in T_1, per ogni punto $\bar{x}$ interno a questo cerchio si abbia manifestamente

$$\delta(x_0) + r \geqq \delta(\bar{x}) \geqq \delta(x_0) - r,$$

onde la continuità di $\delta(x)$.

3. Ciò posto, si può enunciare la seguente proposizione:

« Se si trova in T_1 un punto per il quale sia

$$\rho(x) < \delta(x), \tag{2}$$

« esisterà tutta un'area i cui punti soddisfano a questa disuguaglianza,
« e in questa area la serie (a) è convergente assolutamente ed uni-
« formemente e rappresenta quindi una funzione analitica. »

Intanto, se esiste entro a T_1 un punto per il quale sia verificata la (2), esisterà tutta un'area i cui punti verificheranno quella disuguaglianza, in seguito alla continuità di $\rho(x)$ e di $\delta(x)$; sia T_2 questa area.

Indichiamo con x_0 un punto qualunque interno a T_2; per avere $\rho(x_0) < \delta(x_0)$, si possono assegnare tre numeri positivi ζ_1, ζ_2, ζ_3 tali che sia

$$\rho(x_0) < \zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3 < \delta(x_0). \tag{3}$$

Essendo poi la $\rho(x)$ continua, si può descrivere un cerchio (x_0, r) tale che per ogni suo punto sia

$$\rho(x) < \zeta_1. \tag{4}$$

D'altra parte, la funzione $\varphi(x)$ essendo regolare in T_1 sarà svi-

(*) Si indica con questa notazione il cerchio di centro x_0 e di raggio r.

luppabile in serie di potenze di $x - x_0$ convergente nel cerchio $[x_0, \delta(x_0)]$; esso avrà dunque nel cerchio (x_0, ζ_3) un massimo valore assoluto m. La $\varphi(x + \zeta_2)$ si può quindi sviluppare col teorema del Taylor

$$\varphi(x + \zeta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta_2^n}{n!} \frac{d^n \varphi}{dx^n}$$

sotto la condizione $|x - x_0| + \zeta_2 < \delta(x_0)$, cioè a fortiori per i punti x del cerchio $(x_0, \zeta_3 - \zeta_2)$, ed in questo cerchiò sarà, come è noto:

$$\frac{1}{n!}\left|\frac{d^n \varphi}{dx^n}\right| < \frac{m}{\zeta_2^n}. \tag{5}$$

Considerando ora la serie (a), e prendendo come intorno di x_0 il minore dei due cerchi (x_0, r) ed $(x_0, \zeta_3 - \zeta_2)$, si avrà in forza delle (1) e (4), per tutti i punti x appartenenti a quell'intorno:

$$|\alpha_n(x)| < \rho^n(x) < \zeta_1^n < \zeta_2^n,$$

da cui risulta, per la (5), la convergenza assoluta ed in ugual grado della serie (a) per ogni punto dell'intorno considerato di x_0, e di conseguenza per tutta l'area T_1. C. D. D.

4. Chiamando *campo funzionale di convergenza* della serie (a) l'insieme delle funzioni analitiche $\varphi(x)$ che, sostituite in (a), la rendono uniformemente convergente nei punti di una area, si vede che a questo campo appartengono tutte le funzioni per le quali la distanza di un punto x di T dalla loro singolarità più prossima è, per qualche punto x, superiore a $\rho(x)$. Se poi per $x = x_0$, si ha $\rho(x_0) = 0$, ogni serie di potenze di $x - x_0$ convergente in un intorno di x_0 per quanto piccolo, appartiene al campo funzionale di convergenza della (a), che viene così ad essere, rispetto ad x_0, una di quelle serie che in un lavoro citato (*) ho chiamate *di prima specie*.

(*) *Della validità effettiva*, ecc. pag. 29.

II. — *Serie ricorrenti.*

5. Abbiasi l'equazione differenziale lineare non omogenea

$$\frac{d^m \psi}{d x^m} + \pi_1 \frac{d^{m-1} \psi}{d x^{m-1}} + \ldots + \pi_m \psi = \varphi(x), \tag{6}$$

dove π_1, π_2, ... π_m e $\varphi(x)$ sono funzioni analitiche regolari nel campo T. Dico che si può esprimere la soluzione di questa equazione mediante una serie della forma (a), convergente per ogni funzione $\varphi(x)$; in altre parole, riguardando il primo membro della (6) come un'operazione $F(\psi)$ (forma differenziale lineare) da eseguirsi sulla funzione ψ, dico che l'operazione inversa $F^{-1}(\varphi)$ è rappresentabile mediante una serie (a) di prima specie. Ciò si può vedere nei due modi seguenti.

6. Si ponga

$$F^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) \frac{d^n \varphi}{d x^n},$$

dove le funzioni $\lambda_n(x)$ sono da determinarsi; possiamo applicare (*) il metodo dei coefficienti indeterminati e scriviamo all'uopo

$$F\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) \frac{d^n \varphi}{d x^n}\right) = \varphi(x);$$

applicando l'operazione distributiva F ai singoli termini della serie e ricordando la nota formula di d'Alembert (**), si ottiene fra i coefficienti $\lambda_n(x)$ il sistema di relazioni

$$F(\lambda_n) + F'(\lambda_{n-1}) + \frac{1}{1.2} F''(\lambda_{n-2}) + \ldots + \frac{1}{m!} F^{(m)}(\lambda_{n-m}) = 0 \tag{7}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(*) *Della validità effettiva*, ecc., pag. 31.

(**) *Operazioni distributive: le equazioni differenziali lineari non omogenee.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, aprile 1896, pag. 302, formula (2).

colla condizione iniziale

$$F(\lambda_0) = 1.$$

La (7) è qui un'equazione mista differenziale e alle differenze, di cui possiamo determinare l'integrale generale contenente m funzioni arbitrarie. Sia infatti $\rho(x)$ un integrale dell'equazione $F = 0$; sia χ una funzione arbitraria, regolare in un intorno di $x = x_0$, dove x_0 è un punto qualunque interno a T, e sia posto per brevità

$$D^{-n}\chi(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x}\chi(x)\,dx^n;$$

se in (7) sostituiamo a λ_n l'espressione

$$(-1)^n \rho(x) D^{-n}\chi(x)$$

ed applichiamo la citata formula di d'Alembert, scorgiamo senza fatica che l'equazione (7) medesima è soddisfatta per $n = m$, $m + 1$, $m + 2, \dots$ L'integrale generale della (7) si avrà dunque, prendendo un sistema fondamentale $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$, $\dots$ $\rho_m(x)$ d'integrali dell'equazione $F = 0$ ed altrettante funzioni arbitrarie $\chi_1, \chi_2, \dots \chi_m$, sotto la forma

$$\lambda_n(x) = \sum_{i=1}^{m}(-1)^n \rho_i(x) D^{-n}\chi_i(x), \tag{6}$$
$$(n = m,\ m+1,\ m+2, \dots).$$

Integrata così in modo generale l'equazione ricorrente (7) rimangono ancora da determinarsi le funzioni arbitrarie in modo da soddisfare alle equazioni di condizione delle $\lambda_n(x)$ per i valori $n = 0, 1, 2, \dots m - 1$; cioè a

$$\tag{9} \begin{cases} F(\lambda_0) = 1, \\ F(\lambda_1) + F'(\lambda_0) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ F(\lambda_{m-1}) + F'(\lambda_{m-2}) + \dots + \dfrac{1}{m-1\,!}F^{(m-1)}(\lambda_0) = 0. \end{cases}$$

All'uopo, basta di ricordare le relazioni fra il sistema d'integrali $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_m$ ed il sistema corrispondente di moltiplicatori, che indicheremo con $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m$.

Queste relazioni sono, come è noto (*):

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{d^h \rho_i}{d x^h} \frac{d^k \mu_i}{d x^k} = \begin{cases} 0, & \text{per } h + k < m - 1, \\ (-1)^k, & \text{per } h + k = m - 1. \end{cases}$$

Tenendo conto di queste relazioni, si verifica facilmente che il sistema (9) è soddisfatto facendo $\chi_i = D^{-1} \mu_i$, $(i = 1, 2, \ldots m)$, talchè lo sviluppo di ψ o $F^{-1}(\varphi)$ viene dato nella forma

$$(10) \qquad F^{-1}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} (-1)^n \rho_i(x) D^{-(n+1)}[\mu_i(x)] \frac{d^n \varphi}{d x^n}.$$

7. L'altro metodo per giungere a questo risultato è il seguente. Indicando ancora con $\rho_i(x)$ e $\mu_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ un sistema fondamentale d'integrali ed il corrispondente sistema di moltiplicatori della $F = 0$, il metodo della variazione delle costanti arbitrarie di Lagrange fornisce l'espressione di ψ o di $F^{-1}(\varphi)$:

$$F^{-1}(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \rho_i(x) D^{-1}[\mu_i(x) \varphi(x)].$$

Ora per lo sviluppo di $D^{-1}[\mu_i(x)\varphi(x)]$ si può applicare una formula che ho fatta conoscere recentemente (**) e di cui ho date le condizioni di validità; essa ci dà

$$D^{-1}(\mu_i \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D^{-(n+1)}(\mu_i) \frac{d^n \varphi}{d x^n},$$

e sostituendo nella precedente espressione di F^{-1}, si ritrova immediatamente la (10).

8. Si tratta ora di vedere se per la serie (10) così ottenuta

---

(*) Vedi, p. es., Schlesinger: *Handbuch der lin. Differentialgl.*, Bd. I, pag. 63.

(**) *Operazioni distributive: l'integrazione successiva.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, aprile 1896, pag. 239.

sono verificate le condizioni di convergenza stabilite nella prima parte. È noto intanto che nell'area semplicemente connessa T, in cui l'equazione differenziale $F = 0$ non ha alcun punto singolare, sono regolari le $2m$ funzioni $\rho_i(x)$ e $\mu_i(x)$. Prendiamo un punto x_0 qualunque interno a T, e descriviamo un cerchio (x_0, r) il cui raggio sia inferiore alla minima distanza $\delta(x_0)$ di x_0 dal contorno di T. Entro (x_0, r) le $\rho_i(x)$ avranno un massimo valore assoluto g_i; inoltre si avrà

$$\mu_i(x) = a_{i,0} + a_{i,1}(x - x_0) + a_{i,2}(x - x_0)^2 + \ldots,$$

e la serie

$$\Sigma |a_{i,n}| (x - x_0)^n$$

avrà pure in (x_0, r) un massimo valore assoluto: sia h_i. Essendosi posto

$$D^{-(n+1)}\mu_i = \int_{x_0}^{x} D^{-n}\mu_i(x)\,dx, \quad D^{-1}\mu_i = \int_{x_0}^{x} \mu_i(x)\,dx,$$

si avrà manifestamente entro (x_0, r):

$$|D^{-(n+1)}\mu_i| < \frac{h_i |x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!};$$

posto dunque

$$\sum_{i=1}^{m} g_i h_i = k,$$

il coefficiente di $\frac{d^n \varphi}{dx^n}$ nella (10), ossia

$$\lambda_n = (-1)^n \sum_{i=1}^{m} \rho_i(x) D^{-(n+1)} \mu_i(x)$$

verrà ad essere, in modulo, inferiore a

$$\frac{1}{n!} \frac{k(x - x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Ma $(x - x_0)$ è minore di $\delta(x_0)$ e quindi entro il cerchio (x_0, r) la condizione (2) è soddisfatta.

La formula (10) rappresenta così in tutto l'intorno (x_0, r) di x_0 una funzione analitica regolare, la quale può essere continuata analiticamente in tutto T e che è la soluzione della equazione (6); in altri termini, essa vale a rappresentare una delle determinazioni dell'operazione $F^{-1}(\varphi)$. Possiamo aggiungere che per le funzioni φ regolari nell'intorno di x_0, la serie (10) è una di quelle che abbiamo dette *di prima specie*.

9. Per la relazione (7) cui soddisfano i suoi coefficienti, la serie (10) si può dire *ricorrente*. Non aggiungendo alla (7) le condizioni (9), ma lasciando invece arbitrarie le $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}$, la equazione (7) determinerà un sistema λ_n di coefficienti pei quali la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) \frac{d^n \varphi}{d x^n}$$

avrà un significato più generale: essa rappresenterà cioè l'operazione $F^{-1} G$, essendo G una forma differenziale lineare dell'ordine $m - 1$.

10. Nel caso particolare che l'equazione (6) abbia i coefficienti costanti, e sia

$$(11) \qquad F(\psi) = \frac{d^m \psi}{d x^m} + a_1 \frac{d^{m-1} \psi}{d x^{m-1}} + \ldots + a_m \psi = \varphi(x),$$

si può porre

$$(12) \qquad F^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{d^n \varphi}{d x^n}$$

ed i coefficienti k_n sono costanti soddisfacenti alla relazione di ricorrenza

$$(13) \qquad k_{n-m} + a_1 k_{n-m+1} + \ldots + a_m k_n = 0.$$

La serie (12) differisce dunque da una delle serie ricorrenti

elementari che si considerano in algebra, per il solo fatto della sostituzione delle derivate successive alle potenze di una variabile. Ma questa serie (12) presenta un inconveniente: essa non converge se non per funzioni $\varphi(x)$ assai particolari, e precisamente solo per funzioni trascendenti intere in cui la legge di decrescimento dei coefficienti è assoggettata a certe restrizioni.

È dunque preferibile sostituire allo sviluppo (11) la serie (10) precedentemente ottenuta, che si può rendere invece convergente per ogni funzione analitica $\varphi(x)$.

A questo effetto, consideriamo l'equazione caratteristica della equazione lineare a coefficienti costanti $F = 0$, cioè la

$$f(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m = 0 \tag{14}$$

e supponiamo per semplicità le sue radici tutte semplici, $z_1, z_2, \ldots z_m$ (lasciando al lettore la facile modificazione cui darebbe luogo il caso delle radici multiple). Gl'integrali di $F = 0$ saranno dati da

$$\rho_i(x) = e^{z_i x}, \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

i moltiplicatori (integrali dell'equazione aggiunta di $F = 0$ e per la quale l'equazione caratteristica si ottiene da (14) col cambiamento di z in $-z$) saranno dati da $c_i e^{-z_i x}$, dove le costanti c_i devono soddisfare al sistema

$$\sum_{i=1}^{m} c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} c_i z_i = 0, \ldots \sum_{i=1}^{m} c_i z_i^{m-2} = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} c_i z_i^{m-1} = 1,$$

donde risulta immediatamente

$$c_i = \frac{1}{f'(z_i)},$$

dove $f'(z)$ indica la derivata di $f(z)$. La formula (10) diviene così, nel nostro caso

$$F^{-1}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^n e^{z_i x}}{f'(z_i)} D^{-(n+1)}(e^{-z_i x}) \frac{d^n \varphi}{d x^n}. \tag{15}$$

Questa, prendendo il limite inferiore delle integrazioni indicate

da $D^{-(n+1)}$ uguale a zero, converge, per valori di $|x|$ abbastanza piccoli, per ogni funzione analitica $\varphi(x)$ regolare intorno ad $x = 0$, ed è sotto questo riguardo assai preferibile allo sviluppo (12). Nella Nota più volte citata: « *Sulla validità effettiva di alcuni sviluppi* » ho già fatto conoscere, in un caso particolare, il vantaggio della sostituzione di uno sviluppo della forma (15) ad uno della forma (12); ho mostrato cioè che allo sviluppo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \varphi}{d x^n}$$

(convergente solo per le funzioni φ che siano quelle trascendenti intere in cui il rapporto di un termine al precedente tende a zero più rapidamente di $\frac{1}{n}$ e quindi serie di seconda specie) si può sostituire come soluzione dell'equazione

$$\psi - \frac{d\psi}{dx} = \varphi$$

lo sviluppo convergente per ogni funzione analitica $\varphi(x)$ regolare in un intorno di $x = 0$ (serie di prima specie)

$$- e^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D^{-(n+1)}(e^{-x}) \frac{d^n \varphi}{d x^n} .$$

Bologna, 8 aprile 1897.

S. Pincherle.

Si moltiplichi la precedente equazione per μ ed al posto di $\mu P'_n$ si introduca l'espressione somministrata dalla (I), si ottiene ovviamente:

$$n P_n = n \mu P_{n-1} - (1 - \mu^2) P'_{n-1}. \qquad \text{(III)}$$

Questa relazione, partendo da $P_0 = 1$, *permette di ottenere successivamente tutti i polinomii* $P_n(\mu)$: essa e la (II) sono molto comode per studiare le proprietà di questi polinomii.

Per es. nella (II) si scriva $n + 1$ invece di n e nell'equazione ottenuta in luogo di P'_n si ponga l'espressione data dalla (II); si trova così:

$$P'_{n+1} = (n + 1) P_n + n \mu P_{n-1} + \mu^2 P'_{n-1};$$

da questa relazione sottraendo la (III) si deduce la ben nota relazione:

$$P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n + 1) P_n.$$

Si cangi invece n in $n + 1$ nella (III) ed in luogo di P'_n si sostituisca l'espressione (II), si ha:

$$(n + 1) P_{n+1} = (n + 1) \mu P_n - n(1 - \mu^2) P_{n-1} - \mu(1 - \mu^2) P'_{n-1};$$

ma la (III) dà:

$$-(1 - \mu^2) P'_{n-1} = n P_n - n \mu P_{n-1},$$

quindi moltiplicando quest'ultima equazione per μ e sommandola colla precedente segue:

$$(n + 1) P_{n+1} = (2n + 1) \mu P_n - n P_{n-1},$$

relazione pure conosciuta.

Assunti tre assi ortogonali di riferimento, diciamo: x, y, z;

x', y', z' le coordinate di 2 punti, ρ e ρ' le rispettive distanze dall'origine, e ψ l'angolo che i due raggi vettori ad essi condotti fanno fra loro.

Si ha:

$$\begin{aligned}(tx - x')^2 + (ty - y')^2 + (tz - z')^2 &= \rho^2 t^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\psi \\ &= (\rho t - \rho' e^{i\psi})(\rho t - \rho' e^{-i\psi}),\end{aligned}$$

e però l'espressione $[(tx - x')^2 + (ty - y')^2 + (tz + z')^2]^{-\frac{1}{2}}$ è sviluppabile in serie ordinata secondo le potenze crescenti di t per i valori di questa variabile il cui modulo è minore di $\frac{\rho'}{\rho}$. La serie anzidetta sarà convergente adunque anche per $t = 1$ quando: $\rho < \rho'$. Si trova così:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x'} + y\frac{\partial}{\partial y'} + z\frac{\partial}{\partial z'}\right)^n \frac{1}{\rho'} \\ &= \frac{1}{\rho'}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{\rho}{\rho'}\cos\psi+\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{\rho'^{n+1}}P_n(\cos\psi)\end{aligned}$$

e quindi:

$$P_n(\cos\psi) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\rho'^{n+1}}{\rho^n}\left(x\frac{\partial}{\partial x'} + y\frac{\partial}{\partial y'} + z\frac{\partial}{\partial z'}\right)^n \frac{1}{\rho'}.$$

Assunto un sistema di coordinate polari col polo nell'origine, avente per asse polare l'asse delle x e per primo piano meridiano quello delle yx, dette ρ, ϑ, ω rispettivamente il raggio vettore, la distanza polare e la longitudine del punto (x, y, z), si ha:

$$x = \rho\cos\vartheta, \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\omega, \qquad z = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\omega.$$

Analogamente, dette ρ', ϑ', ω' le coordinate polari di (x', y', z'), risulta:

$$\cos\psi = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\cos(\omega - \omega').$$

Per $\vartheta = 0$ si ha:

$$\psi = \vartheta';$$

e però posto $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, essendo $\rho = 1$, si ha

$$P_n(\cos \vartheta') = \frac{(-1)^n}{n!} \rho'^{n+1} \frac{\partial^n \frac{1}{\rho'}}{\partial x'^n}. \qquad (x' = \rho' \cos \vartheta')$$

Tolti gli accenti e scritto μ invece di $\cos \vartheta$ la formula precedente diviene:

$$P_n(\mu) = \frac{(-1)^n}{n!} \rho^{n+1} \left(\frac{\partial^n \frac{1}{\rho}}{\partial x^n} \right)_{x=\rho\mu}.$$

Genova, aprile 1897.

G. MORERA.

ESTRATTI DAI VERBALI.

[*Vedi* t. X, pp. 38-40].

Per le pubblicazioni periodiche e non periodiche ricevute in dono o in cambio dei Rendiconti e presentate nelle varie Adunanze, veggasi la Seconda Parte: *Biblioteca Matematica*.

ADUNANZA DEL 9 FEBBRAJO 1896. (Presidenza F. Caldarera).

Memorie e Comunicazioni.

GERBALDI: *Un teorema sulle singolarità della Jacobiana di quattro superficie algebriche.*

ADUNANZA DEL 23 FEBBRAJO 1896. (Presidenza F. Caldarera).

Memorie e Comunicazioni.

CORDONE: *Sopra una classe d'equazioni risolubili algebricamente.*

BURALI-FORTI: *Il metodo del Grassmann nella Geometria proiettiva* (Nota 1ª).

ADUNANZA DELL'8 MARZO 1896. (Presidenza F. Caldarera).

Corrispondenza. — Con lettera del 3 marzo 1896, il Prof. V. Mollame si dimette da socio del Circolo.

Memorie e Comunicazioni.

BRIOSCHI: *Sopra un teorema del sig. Hilbert.*

ADUNANZA DEL 22 MARZO 1896. (Presidenza F. Caldarera).

Affari interni.

ADUNANZA DEL 12 APRILE 1896. (Presidenza F. Caldarera).

Il PRESIDENTE dà il triste annuncio della morte del socio residente Cavaliere Uff. Giovanni Guidotti, preside del R. Istituto Tecnico, avvenuta in Palermo ieri 11 aprile 1896.

ADUNANZA DEL 26 APRILE 1896. (Presidenza F. Caldarera).

Affari interni.

ADUNANZA DEL 10 MAGGIO 1896. (Presidenza F. Caldarera).

Memorie e Comunicazioni.

AUTONNE: *Sur les pôles des fonctions uniformes à deux variables indépendantes.*

GERBALDI, presentando il *Trattato di Trigonometria rettilinea e sferica*

(Palermo, 1896) di cui l'Autore, prof. Caldarera, fa dono alla Biblioteca del Circolo, si esprime nei seguenti termini:

Il presente Trattato è eccellente. Pregi principali di esso sono: l'unità e generalità del metodo, la sobrietà nella scelta e nello svolgimento della materia, la semplicità ed eleganza con cui si succedono le trasformazioni algebriche.

Dopo di avere accuratamente premesso ciò che si riferisce al principio dei segni per i segmenti della retta, gli archi nel circolo, gli angoli e le aree nel piano, l'Autore pone i fondamenti delle coordinate cartesiane nel piano e nello spazio, stabilisce le equazioni del circolo e della sfera, e col sussidio di queste deduce alcune formole [Vedi in particolar modo le (6) a pag. 23, le (2) a pag. 24, le (12) e (13) a pag. 31], che si traducono poi immediatamente nelle formole trigonometriche per l'addizione e sottrazione degli archi [pag. 41] e nelle relazioni fondamentali fra gli elementi di un triangolo piano, o sferico, qualunque [pag. 64, 81]. Questo impiego delle coordinate è fatto con maestria, ed è quello che conferisce al trattato la unità e generalità di metodo. Importa tener presente che questa maniera di trattare la trigonometria è stata dal prof. Caldarera introdotta fin dal 1856 (Vedi *Avvertenza*).

In piccola mole, il libro contiene tutte le formole che generalmente occorrono nelle applicazioni della trigonometria; contiene inoltre alcune questioni, scelte con avvedutezza e svolte con sobrietà (Vedi ad es., pp. 48, 60, 73-78, 100-111), le quali, se non sono tassativamente prescritte dai programmi delle nostre scuole secondarie, valgono tuttavia ad ingenerare negli studiosi il desiderio di apprendere da sè più di quello che non si possa nella scuola insegnare. L'esposizione procede rigorosa, e nel tempo stesso stringata come si conviene, perchè un libro fatto per la scuola non deve sostituirsi alla viva parola dell'insegnante, se si vuole che questa e quello producano il maggior profitto degli scuolari.

Infine l'ordine, l'eleganza e la semplicità con cui si succedono le formole e gli sviluppi algebrici (ciò che pure forma una delle attrattive del libro), sono il maturo frutto del lungo insegnamento prestato dall'Autore nel R. Istituto Tecnico di Palermo.

ADUNANZA DEL 24 MAGGIO 1896. (Presidenza F. Caldarera).

Corrispondenza. — La *Česká Akademie Císaře Františka Josefa* di Praga partecipa la morte del suo protettore l'Arciduca Carlo Ludovico avvenuta il 19 maggio 1896. Il Circolo si associa al lutto della detta Accademia ed incarica il Presidente di esprimere le condoglianze della Società.

Memorie e Comunicazioni.

AUTONNE: *Sur les pôles des fonctions uniformes à deux variables indépendantes* (Continuazione e fine).

ADUNANZA DEL 14 GIUGNO 1896. (Presidenza F. Caldarera).

Il Presidente, con profondo dolore, dà il triste annuncio della morte del

socio non residente Generale Menabrea, Marchese di Val Dora, avvenuta a St.-Cassin presso Chambéry, alle ore 18 del dì 25 maggio 1896. Partecipa altresì la morte del socio non residente Filippo Gambardella, professore nella R. Accademia Navale di Livorno, avvenuta in Livorno alle ore 23 del dì 29 maggio 1896.

Memorie e Comunicazioni.

BURGATTI: *Sulla torsione geodetica delle linee tracciate sopra una superficie.*

DI PIRRO: *Sulle trasformazioni delle equazioni della Dinamica.*

DE FRANCHIS: *Sulla curva luogo dei contatti d'ordine k delle curve d'un fascio colle curve d'un sistema lineare* ∞^k. (Memoria II^a).

ADUNANZA DEL 28 GIUGNO 1896. (Presidenza F. Caldarera).

Memorie e Comunicazioni.

DE FRANCHIS: *Sulla curva luogo dei contatti d'ordine k delle curve d'un fascio colle curve d'un sistema lineare* ∞^k. (Memoria II^a). (Continuazione e fine).

AMICI: *Sulla risoluzione della congruenza* $x^{2^k} \equiv b \pmod{p^\lambda}$.

ADUNANZA DEL 12 LUGLIO 1896. (Presidenza F. Caldarera).

Il Circolo delibera di ringraziare il Sindaco ed il Consiglio Comunale di Palermo pel sussidio di L. 500 accordato alla Società pel 1896, a titolo d'incoraggiamento per la pubblicazione dei Rendiconti.

ADUNANZA DELL'8 NOVEMBRE 1896. (Presidenza F. Caldarera).

Memorie e Comunicazioni.

HUMBERT: *Sur une génération géométrique de la surface de Kummer.*

PIERI: *Sull'ordine della varietà generata da più sistemi lineari omografici.*

ADUNANZA DEL 22 NOVEMBRE 1896. (Presidenza F. Caldarera).

Corrispondenza. — L'*Associazione filosofica* e la *Società dei Matematici Czechi* di Praga invitano il Circolo a prender parte alla celebrazione del 3° centenario della nascita di Descartes, che avrà luogo a Praga il 6 dic. 1896. Il Circolo ringrazia.

ADUNANZA DEL 13 DICEMBRE 1896. (Presidenza F. Caldarera).

Affari interni.

ADUNANZA DEL 27 DICEMBRE 1896. (Presidenza F. Caldarera).

Corrispondenza.—I signori Amato-Pojero, Crescini, Giuliani, Lazzeri, Lebon, Mastricchi, Messina, Pertica, Tomasini si dimettono da soci del Circolo.

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazioni a schede segrete, i signori: Euplio Conoscente, proposto dai soci Albeggiani e Gerbaldi;

Luigi Lo Monaco Aprile, proposto dai soci Albeggiani e Guccia; Ing. Domenico Saladino, proposto dai soci Gebbia e Rotigliano, sono eletti *soci residenti;* ed i signori: Ing. Felice Verde (Spezia), proposto dai soci Peano e Porro; Dr. Adolfo Viterbi (Mantova), proposto dai soci Vivanti e Martinetti, sono eletti *soci non residenti.*

ADUNANZA DEL 10 GENNAJO 1897. (Presidenza F. Caldarera).

Corrispondenza. — I signori Conoscente, Lo Monaco Aprile, Saladino, Verde e Viterbi ringraziano per la loro ammissione a soci del Circolo.

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazioni a schede segrete, il signor Dionisio Spanò, proposto dai soci Guccia e Gerbaldi, è eletto *socio residente;* ed i signori: Horatio S. Carslaw (Helensburgh, Scozia), proposto dai soci Guccia e Gerbaldi; Dr. Enrico Castelli (Trapani), proposto dai soci Bianchi e Guccia; Prof. Michele Petrovitch (Belgrado, Serbia), proposto dai soci Gerbaldi e Guccia, sono eletti *soci non residenti.*

ADUNANZA STRAORDINARIA DEL 17 GENNAJO 1897, a' sensi dell'art. 18 dello Statuto. (Presidenza F. Caldarera).

Alle ore 15 precise il Presidente apre l'adunanza e richiama gli articoli 16, 17, 18, 19, 20, 32, 33 dello Statuto, relativi alla elezione e alle funzioni del Consiglio Direttivo (Comitato di Redazione dei Rendiconti). Il Presidente constata che le lettere per la elezione del Consiglio Direttivo pervenute all'Ufficio di Presidenza fino alle ore 15 di oggi 17 gennajo 1897 sono in numero 99. *Tre* di queste lettere sono dichiarate *nulle* perchè non firmate nel retro. Le rimanenti 96 portano la firma dei soci:

Agnello, Alagna, Albeggiani, Amici, Amodeo, André, Bagnera, Basile, Beltrami, Berzolari, Blaserna, Bontade, Bordiga, Brambilla, Bucca, Burgatti, Caldarera, Capitò, Carslaw, Castellano, Castelli, Castelnuovo, Cerruti, Certo, Conoscente, Cremona, De Franchis, Della Rocca, Del Pezzo, Del Re, Di Pirro, D'Ovidio, Durán Loriga, Enriques, Fano, Fileti, Floridia, Fouret, Galdeano (de), Garibaldi, Gebbia, Gerbaldi, Giudice, Guccia, Jadanza, Jordan, Jung, Kerbedz (de), Laisant, La Manna D., La Mensa, Lanza di Mazzarino, Lauricella, Levi-Civita, Lo Monaco Aprile, Loria, Macrì, Maisano, Marcolongo, Marraffa, Martinetti, Masoni, Mattina, Merlani, Messina, Miceli, Murer, Neppi Modona, Pepoli, Pieri, Pincherle, Pintacuda, Piuma, Poincaré, Politi, Porcelli S., Previtera, Reina, Retali, Rindi, Rotigliano, Ruffini, Sadun, Schlegel, Sforza, Somigliana, Spanò, Spelta, Taschetti, Torelli, Valeri, Verde, Viola, Viterbi, Vivanti, Volterra.

Aperte dal Presidente queste 96 lettere, si sono trovate altrettante buste piccole chiuse. Aperte dal Presidente le anzidette 96 buste piccole si sono trovate altrettante schede di votazione. Fattone lo spoglio dal Presidente, assistito

dai SEGRETARI e dagli scrutatori signori Bucca e Conoscente, si è avuto il risultato seguente:

Soci del Circolo (addì 17 gennajo 1897) 170 — Votanti 96.

RESIDENTI.

Albeggiani	eletto	con	voti	90
Gebbia	»	»	»	89
Gerbaldi	»	»	»	93
Guccia	»	»	»	92
Torelli	»	»	»	92

Riportarono inoltre voti:

Caldarera 1 — Capitò 1 — Paternò (F. P.) 1 — Venturi 8 — Zona 2 — Dispersi 1.

NON RESIDENTI.

Beltrami (Roma)	eletto	con	voti	93
Bianchi (Pisa)	»	»	»	93
Brioschi (Milano)	»	»	»	94
Capelli (Napoli)	»	»	»	93
Cerruti (Roma)	»	»	»	93
Cremona (Roma)	»	»	»	92
Del Pezzo (Napoli)	»	»	»	81
Jung (Milano)	»	»	»	81
Loria (Genova)	»	»	»	83
Maisano (Messina)	»	»	»	81
Mittag-Leffler (Stoccolma)	»	»	»	91
Peano (Torino)	»	»	»	91
Pincherle (Bologna)	»	»	»	91
Poincaré (Parigi)	»	»	»	90
Volterra (Torino)	»	»	»	83

Riportarono inoltre voti:

Arzelà 1 — Bertini 11 — Burali-Forti 1 — Castelnuovo 4 — Chizzoni 1 — Del Re 1 — D'Ovidio 11 — Enriques 1 — Giudice 1 — Marcolongo 1 — Martinetti 2 — Morera 9 — Picard 1 — Ricci 2 — Salvatore-Dino 1 — Segre 17 — Somigliana 2 — Veronese 10 — Vivanti 1.

Il PRESIDENTE proclama il risultato della votazione. Approvato dall'Assemblea il presente verbale, la seduta è tolta alle ore 19.

ADUNANZA DEL 24 GENNAJO 1897. (Presidenza G. B. Guccia).

Corrispondenza. — Il Circolo accetta di istituire il cambio dei suoi Rendiconti con la raccolta scientifica « Travaux Mathématiques et Physiques » di Varsavia.

ADUNANZA DEL 14 FEBBRAJO 1897. (Presidenza F. Caldarera).

Il PRESIDENTE comunica ai Soci che dopo le ore 15 del dì 17 gennajo u. s. pervennero all'Ufficio di Presidenza altre 5 lettere portanti all'esterno l'indicazione a stampa « Elezione del Consiglio Direttivo pel triennio 1897-98-99 », cioè *tre* il 18 gennajo, portanti le firme dei soci Burali-Forti, Mancini, Terzi, *una* il 20 a firma del socio Mittag-Leffler; ed *una* il 21, a firma del socio Paternò (E.). Queste 5 lettere sono state rimandate intatte ai mittenti.

Il PRESIDENTE partecipa ai Soci che il nuovo Consiglio Direttivo ha scelto il prof. G. B. Guccia quale delegato per dirigere la pubblicazione dei Rendiconti pel triennio 1897-98-99. [Vedi art. 20 dello Statuto].

Corrispondenza. — La *Reale Accademia delle Scienze di Torino* dà il doloroso annuncio della morte del Prof. Comm. Galileo Ferraris, senatore del Regno, avvenuta il 7 febbrajo 1897. Il Circolo si associa al lutto della detta Accademia e dà incarico al Presidente di esprimere le condoglianze della Società.

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete, il Dottore Nicolò Traverso (Tortona), proposto dai soci Loria e Morera, è eletto *socio non residente.*

Affari interni. — Esposizione ed approvazione del Conto consuntivo dell'esercizio 1896, reso dal Tesoriere, e del Bilancio di previsione per l'esercizio 1897. — Nomina di una Commissione, composta del Presidente e dei soci Albeggiani e Gebbia, per esaminare i conti relativi all'ammobigliamento del Circolo, compilare l'inventario e far consegna al Tesoriere degli oggetti in esso distinti.

Memorie e Comunicazioni.

BURALI-FORTI: *Il metodo del Grassmann nella Geometria proiettiva.* (Nota II^a).

ADUNANZA DEL 28 FEBBRAJO 1897. (Presidenza F. Caldarera).

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete, il signor Angelo Gugliuzzo, proposto dai soci Guccia e Gerbaldi, è eletto *socio residente.*

Memorie e Comunicazioni.

VOLTERRA: *Sul principio di Dirichlet.*

BAGNERA: *Sopra la costruzione del gruppo dell'icosaedro.*

BUCCA: *Sullo sviluppo d'una funzione uniforme di variabile complessa, dotata di singolarità isolate, in serie colle caratteristiche separate.*

DE FRANCHIS: *Sopra una teoria geometrica delle singolarità di una curva algebrica piana.*

ADUNANZA DEL 14 MARZO 1897. (Presidenza F. Caldarera).

Memorie e Comunicazioni.

DE FRANCHIS: *Sopra una teoria geometrica delle singolarità di una curva algebrica piana.* (Continuazione).

ADUNANZA DEL 28 MARZO 1897. (Presidenza F. Caldarera).

Memorie e Comunicazioni.

DE FRANCHIS: *Sopra una teoria geometrica delle singolarità di una curva algebrica piana.* (Continuazione e fine).

BURALI-FORTI: *Una questione sui numeri transfiniti.*

ADUNANZA DELL'11 APRILE 1897. (Presidenza F. Caldarera).

Memorie e Comunicazioni.

PINCHERLE: *Sulle serie procedenti secondo le derivate successive di una funzione.*

ADUNANZA DEL 25 APRILE 1897. (Presidenza F. Caldarera).

Affari interni.

ADUNANZA DEL 9 MAGGIO 1897. (Presidenza F. Caldarera).

Memorie e Comunicazioni.

MORERA: *Sui polinomii di Legendre.*

FANO: *Un teorema sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sè.*

ADUNANZA DEL 23 MAGGIO 1897. (Presidenza F. Caldarera).

Memorie e Comunicazioni.

POINCARÉ: *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré.*

PETROVITCH: *Quelques formules générales relatives au calcul des intégrales définies.*

ADUNANZA STRAORDINARIA DEL 30 MAGGIO 1897. (Presidenza F. Caldarera).

Si dà lettura del rapporto della Commissione nominata nella adunanza del 14 febbrajo 1897, col quale si riferisce di aver trovato in perfetta regola il conto

presentato dal socio Guccia. Il Circolo approva tutte le proposte della detta Commissione. — Su proposta del socio Conoscente si nomina una Commissione (che riesce composta dei soci Gerbaldi presidente, Bucca e Conoscente), per la compilazione del «Regolamento speciale della Biblioteca», del quale è cenno all'art. 38 dello Statuto sociale.

ADUNANZA DEL 13 GIUGNO 1897. (Presidenza G. B. Guccia).

Corrispondenza. — La *Sezione Siciliana dell'Associazione elettrotecnica Italiana* invita il Presidente del Circolo Matematico ad assistere alla Commemorazione del Senatore Prof. Galileo Ferraris, che sarà letta oggi stesso, nell'Aula Magna di questa R. Università, dal Prof. Stefano Pagliani, presidente di detta Sezione.

ADUNANZA STRAORDINARIA DEL 15 GIUGNO 1897. (Presidenza F. Caldarera).

Affari interni. — Inventario dei mobili appartenenti al Circolo. Consegna al Tesoriere. Stanziamento di fondi.

ADUNANZA DEL 27 GIUGNO 1897. (Presidenza G. B. Guccia).

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a scrutinio segreto, il sig. Vincenzo Correnti (Palermo), proposto dai soci Gerbaldi e Guccia, è eletto *socio residente.*

Memorie e Comunicazioni.

LAURICELLA: *Sulle temperature stazionarie.*

ADUNANZA DEL 25 LUGLIO 1897. (Presidenza F. Caldarera).

Corrispondenza. — Il Dr. Francesco Tirelli (Siracusa) si dimette da socio del Circolo, a partire dal 1° gennajo 1898.—Il Circolo delibera di ringraziare il Commissario straordinario Comm. Pantaleone ed il Sindaco di Palermo Comm. Amato-Pojero pel sussidio di L. 500 accordato alla Società pel 1897, a titolo d'incoraggiamento alla pubblicazione dei Rendiconti.

ADUNANZA DELL'8 AGOSTO 1897. (G. B. Guccia).

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a scrutinio segreto, il sig. Giuseppe Cassarà Cabasino (Palermo), proposto dai soci de Franchis e Guccia è eletto *socio residente.*

ADUNANZA DEL 22 AGOSTO 1897. (Presidenza F. Caldarera).

Affari interni.

F. G. G. B. G.

ERRATA-CORRIGE.

A pag. 271 del t. IX, dopo la linea 16 aggiungasi:

Il Circolo delibera di ringraziare il Sindaco ed il Consiglio Comunale di Palermo pel sussidio di L. 500 accordato alla Società pel 1895, a titolo d'incoraggiamento per la pubblicazione dei Rendiconti.

SULLE TEMPERATURE STAZIONARIE.

Osservazione di **G. Lauricella**, in Pesaro.

Adunanza del 27 giugno 1897.

Il Poincaré nella sua classica Memoria: *Sur les équations de la physique mathématique* (§ IX) (*), nel risolvere il problema delle temperature stazionarie, sostituisce all'equazione

$$\frac{\partial v}{\partial n} + h v = 0, \qquad (h > 0) \tag{1}$$

che deve essere soddisfatta dalla temperatura v nei punti del contorno ω del corpo D, un'altra equazione ch'Egli chiama *condition modifiée*. Però è facile provare, servendosi dei risultati stessi del Poincaré, che la funzione v, ch'Egli ha calcolata sotto forma di serie, soddisfa effettivamente all'equazione (1). Basta perciò, come vedremo, eseguire direttamente il calcolo di $\frac{\partial v}{\partial n}$ ed esaminare la serie che così si ottiene, anzichè ricorrere alle tre derivate parziali

$$\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}.$$

(*) Questi Rendiconti, t. VIII, anno 1894.

I risultati stabiliti dal Poincaré, dei quali faremo uso sono: 1° la funzione v delle temperature si può mettere sotto la forma

$$v = v_0 + v_1 h + v_2 h^2 + \dots, \tag{2}$$

dove la serie al secondo membro è convergente in ugual grado in tutto D (i punti di ω compresi) per h inferiore ad un certo limite $\frac{1}{2H}$ e dove v_0, v_1, v_2, ... sono funzioni da per tutto finite e continue insieme alle loro derivate prime, che soddisfano nei punti di ω alle equazioni

$$\frac{\partial v_0}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial n} + v_0 = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial n} + v_1 = 0, \dots; \tag{3}$$

2° le serie

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v_0}{\partial x} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x} h + \dfrac{\partial v_2}{\partial x} h^2 + \dots \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y} h + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} h^2 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{4}$$

sono convergenti in ugual grado in tutto il campo interno a D (cioè i punti di ω non compresi).

1. Supponiamo ora che la superficie ω sia di tale natura che, fissata la direzione positiva della normale n nei suoi punti e determinato un sistema di coordinate curvilinee (u, v) su di essa, i punti di D sufficientemente vicini ad ω e quelli di ω stesso siano individuati univocamente dai parametri u, v, n (*).

(*) Per questo basterà, come è noto, che la superficie ω abbia la curvatura determinata e finita in ogni suo punto e che, indicato con

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

il suo elemento lineare, le funzioni E, F, G risultino reali, monodrome, finite e continue in tutto ω e le espressioni E, F, $EG - F^2$ siano sempre positive e diverse da zero.

Ciò posto, le funzioni v_0, v_1, v_2, ... si possono considerare in questi punti come funzioni delle variabili u, v, n; e quindi, in forza delle (4), nei punti di D vicini ad ω (quelli di ω esclusi) la serie

$$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial v_0}{\partial n}+\frac{\partial v_1}{\partial n}h+\frac{\partial v_2}{\partial n}h^2+\ldots, \tag{5}$$

ottenuta derivando la (2) rispetto ad n, sarà convergente in ugual grado.

Indicando con $\frac{\partial v_0'}{\partial n}$, $\frac{\partial v_1'}{\partial n}$, $\frac{\partial v_2'}{\partial n}$, ... i valori di $\frac{\partial v_0}{\partial n}$, $\frac{\partial v_1}{\partial n}$, $\frac{\partial v_2}{\partial n}$, ... nei punti di ω e con $\frac{\partial v'}{\partial n}$ ciò che diventa in questi punti la $\frac{\partial v}{\partial n}$ data dalla serie (5), si ha dalle (3):

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial v'}{\partial n}&=\frac{\partial v_0'}{\partial n}+\frac{\partial v_1'}{\partial n}h+\frac{\partial v_2'}{\partial n}h^2+\ldots\\&=-(v_0h+v_1h^2+v_2h^3+\ldots).\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Questa formola ci addimostra che la serie (6) è convergente in ugual grado in tutto ω come la serie (2); e quindi che la funzione $\frac{\partial v}{\partial n}$, data dalla serie (5), oltre che nei punti di D vicini ad ω ha un significato anche nei punti di ω.

2. Dalla convergenza in ugual grado della (5) e della (6) risulta che, data una grandezza ε piccola ad arbitrio, esisteranno due numeri interi m ed m' tali che per i resti R_{m_1}, R'_{m_1} delle serie (5) e (6) si avrà sempre:

$$|R_{m_1}|<\frac{\varepsilon}{3}, \qquad |R'_{m_1}|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

$$\left(m_1 \geqq \left|\begin{matrix} m \\ m' \end{matrix}\right.\right).$$

Fissato ora un valore di m_1 che soddisfa alle precedenti disuguaglianze e preso a considerare un punto P qualsiasi di ω, poichè le funzioni $\frac{\partial v_0}{\partial n}$, $\frac{\partial v_1}{\partial n}$, $\frac{\partial v_2}{\partial n}$, ... sono continue in tutto il campo D (i punti di ω inclusi), avremo per punti del campo D' sufficientemente vicini a P:

$$\left|\sum_0^{m_1}{}_i \frac{\partial v_i}{\partial n} h^i - \sum_0^{m_1}{}_i \frac{\partial v'_i}{\partial n} h^i\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8}$$

Le (7), (8) ci dànno finalmente la formola

$$\left|\frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial v'}{\partial n}\right| < \varepsilon,$$

la quale dimostra che la funzione $\frac{\partial v}{\partial n}$, data dalla serie (5), è continua anche quando dai punti di D si va a quelli di ω; e quindi, avuto riguardo alla (6), che la funzione v soddisfa all'equazione (1).

La dimostrazione precedente, che abbiamo fatta per $h < \frac{1}{2H}$, si può ripetere anche quando si fa la continuazione analitica della funzione v al di fuori del campo di convergenza.

Pesaro, giugno 1897.

G. LAURICELLA.

SUR L'INTÉGRATION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ.

Par M. H. Poincaré, à Paris.

Adunanza del 23 maggio 1897.

J'ai publié sur ce sujet un premier article, qui a paru dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (tome V, année 1891). Je me suis occupé de nouveau de la même question dans ces derniers temps, dans l'espoir que je parviendrais à généraliser les résultats obtenus. Cet espoir a été déçu. J'ai obtenu cependant quelques résultats partiels, que je prends la liberté de publier, estimant qu'on pourra s'en servir plus tard pour obtenir, par un nouvel effort, une solution plus satisfaisante du problème.

C'est à ce premier article que je renverrai quand je parlerai de « la 1ère partie de ce travail ». J'adopterai d'ailleurs la même terminologie et les mêmes notations que dans cette 1ère partie.

C'est ainsi que la lettre $\sum$ représentera une sommation portant sur toutes les valeurs critiques de C et tous les facteurs u_i. La lettre **S** en caractères gras représentera une sommation étendue à une seule valeur critique de C et à tous les facteurs u_i correspondant à cette valeur. La lettre S en caractères ordinaires représentera une sommation étendue à tous les nœuds.

Soit C une valeur remarquable quelconque et soit

$$f + C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_k^{\alpha_k} = v_1^{\alpha'_1} v_2^{\alpha'_2} \ldots v_k^{\alpha'_k}$$

l'identité correspondante.

Nous aurons toujours les relations :

$$p = \mathrm{S}\,\alpha_i n_i = \mathrm{S}\,\alpha'_i n'_i, \qquad \lambda = \mathrm{S}\,\alpha'_i \lambda'_i.$$

Soit maintenant H_{ik} le nombre des points d'intersection des courbes $u_i = 0$, $u_k = 0$ situés en des cols; et H'_{ik} le nombre des points d'intersection des courbes $v_i = 0$, $v_k = 0$ situés en des cols. Comme $v_i = 0$ équivaut à b_i courbes $u_i = 0$ confondues et $v_k = 0$ à b_k courbes $u_k = 0$ confondues, on aura :

$$H'_{ik} = b_i b_k H_{ik}.$$

Le nombre total des intersections de $v_i = 0$, $v_k = 0$ sera :

$$n'_i n'_k = S\lambda'_i \lambda'_k \mu\nu + H'_{ik}. \tag{1}$$

Celui des intersections de $v_i = 0$ avec une courbe $f + C_1\varphi = 0$ quelconque sera :

$$p n'_i = S\lambda\lambda'_i \mu\nu,$$

d'où

$$n'_i \mathrm{S}\,\alpha'_k n'_k = S[\lambda'_i \mu\nu\, \mathrm{S}\,\alpha'_k \lambda'_k]$$

ou

$$\alpha'_i n'^2_i + \sum_k \alpha'_k n'_i n'_k = \alpha'_i S\lambda'^2_i \mu\nu + \sum_k \alpha'_k S\lambda'_i \lambda'_k \mu\nu.$$

Or

$$\sum_k \alpha'_k n'_i n'_k = \sum_k \alpha'_k S\lambda'_i \lambda'_k \mu\nu + \sum_k \alpha'_k H'_{ik},$$

d'où

$$(2) \qquad \alpha'_i n'^2_i = \alpha'_i S \lambda'^2_i \mu\nu + \sum_k \alpha'_k H'_{ik}.$$

Soient $x_1, x_2, \ldots x_k$ des indéterminées; multiplions l'équation (1) par $2\alpha'_i \alpha'_k x_i x_k$, l'équation (2) par $\alpha'_i x^2_i$ et faisons la somme de toutes les équations analogues; il viendra :

$$(3) \qquad [\mathrm{S}\, \alpha'_i x_i n'_i]^2 = S\mu\nu [\mathrm{S}\, \alpha'_i x_i \lambda'_i]^2 - \mathrm{S\,S}\, \alpha'_i \alpha'_k H'_{ik} (x_i - x_k)^2.$$

Le signe SS se rapporte à une sommation portant sur toutes les combinaisons des indices i et k, chaque combinaison intervenant une fois.

La formule (3) est la généralisation évidente de la formule qui est au début de la page 181.

D'autre part :

$$n'_i = b_i n_i, \qquad \alpha'_i = \frac{\alpha_i}{b_i}.$$

La formule (3) devient alors :

$$(3^{\text{bis}}) \quad [\mathrm{S}\, \alpha_i n_i x_i]^2 = S\mu\nu \left[\mathrm{S}\, \alpha_i x_i \frac{\lambda'_i}{b_i}\right] - \mathrm{S\,S}\, \alpha_i \alpha_k H_{ik} (x_i - x_k)^2.$$

Le terme $\dfrac{\lambda'_i}{b_i}$ est égal à λ_i si le facteur u_i n'est pas singulier.

Plusieurs cas sont à considérer, suivant la nature de la valeur remarquable C. Si C est de 1ère espèce, les α_i, les α'_i et les b_i sont tous égaux à 1 et on a simplement :

$$[\mathrm{S}\, n_i x_i]^2 = S\mu\nu [\mathrm{S}\, \lambda_i x_i]^2 - \mathrm{S\,S}\, H_{ik} (x_i - x_k)^2.$$

Si C est d'une des 3 dernières espèces et que les α aient un diviseur commun δ, et si l'on pose :

$$\alpha_i = \alpha''_i \delta,$$

on pourra diviser l'équation (3^{bis}) par δ^2 et l'écrire :

$$(3^{\text{ter}})\quad [\mathrm{S}\,\alpha_i'' n_i x_i]^2 = S\mu\nu\left[\mathrm{S}\,\alpha_i'' x_i \frac{\lambda_i'}{b_i}\right]^2 - \mathrm{S}\,\mathrm{S}\,\alpha_i''\alpha_k'' H_{ik}(x_i - x_k)^2.$$

Les coefficients α_i'' sont alors premiers entre eux.

Recherche des valeurs remarquables.

Considérons une valeur remarquable de C et la relation (3^{bis}) correspondante. Soit q le nombre des facteurs distincts dans lequel se décompose le polynôme $f + C\varphi$; je dis que le nombre des cols qui interviennent dans la formule (3^{bis}) correspondante est au moins égal à $q - 1$, de telle sorte que l'on a :

$$\mathrm{S}\,\mathrm{S}\,H_{ik} \geqq q - 1.$$

Si, en effet, il n'en était pas ainsi, on pourrait mettre $f + C\varphi$ sous la forme d'un produit de deux facteurs, qui ne seraient d'ailleurs pas forcément irréductibles, et tels qu'il n'y aurait pas de col pour lequel ces deux facteurs s'annulent à la fois. Alors, d'après ce que nous avons vu dans la première partie de ce travail, le polynôme $f + C\varphi$ serait décomposable pour toutes les valeurs de C, ce que nous ne supposons pas.

Pour nous en rendre compte, représentons chacun de nos q facteurs par un point, et joignons deux de ces points par un trait, s'il existe un col pour lequel les deux facteurs correspondants à ces points s'annulent à la fois. S'il y a moins de $q - 1$ cols, il y aura aussi moins de $q - 1$ traits; et il sera impossible d'aller d'un quelconque de nos q points à un autre quelconque de ces q points en suivant les traits ainsi tracés.

Nos q points seront donc répartis au moins en deux groupes, de telle sorte qu'on puisse en suivant les traits aller d'un point d'un groupe à un autre point du même groupe, mais non passer d'un groupe à l'autre.

Soit alors U le produit de tous les facteurs u_i correspondant au premier groupe, chacun de ces facteurs étant affecté de l'exposant

α_i correspondant. Soit V le produit de tous les facteurs u_i correspondant à tous les autres groupes, chacun d'eux affecté de son exposant. On aura :

$$f + C\varphi = UV$$

et il n'y aura pas de col pour lequel U et V s'annulent à la fois.

Soit B le nombre des cols.

Soit A_1 le nombre des valeurs remarquables de la 1ère espèce; Q_1 le nombre total des facteurs correspondants, c'est-à-dire la somme de tous les nombres q relatifs à ces diverses valeurs remarquables de la 1ère espèce.

Soit A_2 et Q_2, A_3 et Q_3, A_4 et Q_4, A_5 et Q_5 les nombres correspondants pour les valeurs remarquables de la 2de, de la 3ème, de la 4ème et de la 5ème espèce.

D'après le résultat que nous venons d'obtenir on aura :

$$B \geqq Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 - A_1 - A_2 - A_3 - A_4$$

et comme d'après la définition des valeurs des 4 premières espèces

$$Q_1 \geqq 2A_1, \quad Q_2 \geqq 2A_2, \quad Q_3 \geqq 2A_3, \quad Q_4 \geqq 2A_4,$$

il viendra :

$$B \geqq A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

D'autre part, d'après la définition des valeurs de la 5ème espèce, on aura :

$$Q_5 = A_5.$$

Enfin, d'après le théorème d'Halphen (loco citato, page 187):

$$A_3 + A_4 + A_5 \leqq 2.$$

Ces inégalités limitent le nombre des valeurs remarquables et même les nombres Q_i. En effet le nombre des cols B est connu,

Mais on peut aller plus loin. Soit une valeur remarquable de l'une des deux premières espèces; soit

$$f + C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3} u_4^{\alpha_4}$$

la décomposition correspondante; je suppose quatre facteurs pour fixer les idées. Les nombres α_1, α_2, α_3, α_4 doivent être premiers entre eux. Représentons ces quatre facteurs par les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4; ces 4 points devront être joints au moins par trois traits correspondant chacun à un col. Je suppose pour fixer les idées que ces trois traits soient les traits $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, $M_3 M_4$. A chacun de ces traits correspondra un col que nous devons choisir parmi les B cols de notre équation différentielle; comme ces cols sont connus et en nombre fini, nous ne pourrons faire qu'un nombre fini d'hypothèses.

Considérons le col qui correspond au trait $M_1 M_2$; ses entiers caractéristiques μ et ν seront connus et nous devrons avoir:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\nu}{\mu}.$$

Nous n'avons ici à choisir qu'entre deux hypothèses; il en serait de même en ce qui concerne les cols qui correspondent aux deux autres traits et les rapports correspondants $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ et $\frac{\alpha_4}{\alpha_3}$.

En résumé, *les rapports des quatre exposants α_i sont connus,* ou plutôt nous ne pouvons faire en ce qui les concerne qu'un *nombre fini d'hypothèses.*

Mais, si la valeur remarquable est de l'une des deux premières espèces, les nombres α_i sont premiers entre eux; nous connaîtrons donc les nombres α_i eux-mêmes.

Si, au contraire, la valeur remarquable est de l'une des trois dernières espèces, les nombres α_i ne sont plus premiers entre eux; mais nous pouvons poser:

$$\alpha_i = \alpha_i'' \delta,$$

le nombre δ étant le plus grand commun diviseur des α_i; nous connaîtrons alors les nombres α_i'' qui sont premiers entre eux; mais nous ne connaîtrons pas δ.

En résumé, au sujet du nombre des valeurs remarquables des cinq espèces, du nombre des facteurs correspondant à chacune d'elles, des exposants α_i relatifs aux valeurs remarquables des deux premières espèces, des nombres α_i'' relatifs aux valeurs remarquables des trois dernières espèces, nous ne pouvons faire qu'un nombre fini d'hypothèses : *Les deux plus grands communs diviseurs δ_1 et δ_2 relatifs aux deux valeurs remarquables des trois dernières espèces, si elles existent, demeurent complètement inconnus.*

Valeurs des n_i.

Adoptons, au sujet du nombre des valeurs remarquables de chaque espèce, de même qu'au sujet des exposants α_i ou α_i'', une des hypothèses en nombre fini que nous pouvons faire. Il nous reste à déterminer les deux nombres δ_1 et δ_2, les deux nombres p et λ, ainsi que les nombres n_i et λ_i.

D'un autre côté, nous ne pouvons faire qu'un nombre fini d'hypothèses au sujet de ceux de nos facteurs qui sont critiques ou hypercritiques, ou doublement singuliers par rapport aux divers nœuds. Ces hypothèses pourront être examinées successivement. Nous adopterons donc l'une d'entre elles; les nombres h_i pourront alors être regardés comme connus, ainsi que les rapports des exposants α_i'.

Nous aurons alors, pour déterminer les nombres n_i, les relations suivantes :

$$(4) \quad m + 2 = 2p - \sum(\alpha_i - 1)n_i, \qquad p = \mathrm{S}\,\alpha_i n_i = \mathrm{S}\,\alpha_i' n_i'.$$

Ces relations peuvent suffire si le nombre des valeurs remarquables de C n'excède pas deux. Dans ce cas, en effet, on aura :

$$p = \mathrm{S}\,\alpha_i n_i$$

pour chacune des deux valeurs remarquables, et, en additionnant

les deux équations ainsi obtenues, il viendra :

$$2p = \sum \alpha_i n_i.$$

En remplaçant dans l'équation qui donne $m + 2$, on trouve :

$$m + 2 = \sum \alpha_i n_i - \sum (\alpha_i - 1) n_i = \sum n_i.$$

Les nombres n_i et le degré p sont donc limités.

Mais il n'en est plus de même si le nombre des valeurs remarquables est supérieur à 2. Il y a lieu de se demander alors si les équations (4) comportent une infinité de solutions en nombres entiers.

Discutons cette question, en considérant d'abord les exposants α_i comme donnés.

Soit q le nombre des valeurs remarquables, $C_1, C_2, \dots C_k$ ces valeurs, K le nombre des facteurs relatifs à C_k. Soient :

$$\alpha_k^1, \alpha_k^2, \dots \alpha_k^K$$

$$n_k^1, n_k^2, \dots n_k^K$$

les valeurs des nombres α_i et n_i correspondant à ces K facteurs.

Soit :

$$\alpha_k^1 < \alpha_k^2 < \dots < \alpha_k^K.$$

Les équations (4) nous donnent alors :

$$\sum n_i = (q - 2)p + m + 2.$$

D'autre part, si $a_1, a_2, \dots a_q$ sont q nombres positifs tels que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_q = q - 2,$$

on aura :

$$(q - 2)p = a_1 \mathrm{S} \alpha_1^i n_1^i + a_2 \mathrm{S} \alpha_2^i n_2^i + \dots + a_q \mathrm{S} \alpha_q^i n_q^i,$$

d'où :

$$(5) \qquad \sum n_i = a_1 \mathrm{S}\, \alpha_1^i n_1^i + \ldots + a_q \mathrm{S}\, \alpha_q^i n_q^i + m + 2.$$

L'équation (5) est évidemment impossible si l'on peut choisir les nombres a_k de telle sorte que l'on ait à la fois

$$a_1 \alpha_1^1 > 1, \quad a_2 \alpha_2^1 > 1, \; \ldots, \; a_q \alpha_q^1 > 1;$$

c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{1}{\alpha_1^1} + \frac{1}{\alpha_2^1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_q^1} < q - 2.$$

Donc, pour que les équations (4) admettent des solutions, ***il faut*** que :

$$(5) \qquad \frac{1}{\alpha_1^1} + \frac{1}{\alpha_2^1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_q^1} > q - 2.$$

Maintenant, dans quels cas les équations (4) admettront-elles une infinité de solutions ? Pour cela il faut et il suffit que les équations (4^{bis}) en p et en n_i,

$$(4^{\text{bis}}) \qquad 2p = \sum (\alpha_i - 1) n_i, \qquad p = \mathrm{S}\, \alpha_i n_i,$$

admettent des solutions positives.

Si l'on peut trouver des nombres a_k tels que :

$$(6) \qquad a_k \alpha_k^1 < 1 < a_k \alpha_k^K \qquad (k = 1, 2, \ldots q)$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_q = q - 2,$$

il est clair que les équations (4^{bis}) admettront des
on pourra, en effet, satisfaire aux conditions :

$$(7) \qquad \mathrm{S} n_i^1 = a_1 \mathrm{S}\, \alpha_i^1 n_i^1, \quad \mathrm{S}\, n_i^2 = a_2 \mathrm{S}\, \alpha_i^2 n_i^2, \; \ldots \; \mathrm{S}\, n$$

Réciproquement, pour que les équations (4^{bis}) admettent des solutions positives, il suffit que les équations (7) en admettent, les nombres a_i étant convenablement choisis; il suffit donc que l'on puisse satisfaire aux conditions (6).

Mais pour qu'on puisse satisfaire aux conditions (6) il faut et il suffit que l'on ait à la fois l'inégalité :

$$(5) \qquad \frac{1}{\alpha_1^1} + \frac{1}{\alpha_2^1} + \dots \frac{1}{\alpha_q^1} = \sum \frac{1}{\alpha_k^1} > q - 2$$

et l'inégalité :

$$(8) \qquad \sum \frac{1}{\alpha_k^k} < q - 2.$$

En résumé, si les inégalités (5) et (8) ont lieu à la fois, les équations (4) admettent une infinité de solutions.

Si l'inégalité (5) a lieu seule, elles peuvent en comporter un nombre fini ou n'en comporter aucune.

Si enfin l'inégalité (5) n'a pas lieu, elles n'en admettent aucune.

Nous avons supposé jusqu'ici que les nombres α_i étaient connus. Cela est vrai en ce qui concerne les valeurs remarquables des deux premières espèces. Mais cela n'est plus vrai s'il existe des valeurs des trois dernières espèces. En ce qui concerne ces dernières, nous ne connaissons que les α_i''; mais nous ne connaissons pas les deux plus grands communs diviseurs δ_1 et δ_2, relatifs aux deux valeurs des trois dernières espèces qui peuvent exister. Posons alors :

$$A_0 = \sum \frac{1}{\alpha_k^1},$$

la sommation s'étendant seulement aux valeurs des deux premières espèces.

Soit $\frac{1}{A_1}$ le plus petit des nombres α_i'' relatifs à la première des valeurs des trois dernières espèces, si cette valeur existe; si elle n'existe pas, nous ferons $A_1 = 0$.

Soit de même $\frac{1}{A_2}$ le plus petit des nombres α_i'' relatifs à la seconde valeur des trois dernières espèces; si elle n'existe pas nous prendrons $A_2 = 0$. Nous pouvons toujours supposer $A_1 > A_2$. L'inégalité (5) devient alors:

$$A_0 + \frac{A_1}{\delta_1} + \frac{A_2}{\delta_2} > q - 2.$$

Si $A_0 > q - 2$, l'inégalité sera satisfaite quels que soient les nombres δ_1 et δ_2.

Si $A_0 + A_1 > q - 2$, $A_0 + A_2 < q - 2$, on pourra prendre δ_2 aussi grand qu'on voudra, mais δ_1 sera limité.

Si $A_0 + A_2 > q - 2$, $A_0 < q - 2$, on pourra prendre l'un des deux nombres δ_1 et δ_2 (mais non tous deux à la fois) aussi grand que l'on voudra.

Si enfin $A_0 + A_1 < q - 2$, les deux nombres δ_1 et δ_2 seront tous deux limités.

Ainsi donc, dans le cas où on aura

$$A_0 + A_1 < q - 2$$

et où l'inégalité (8) ne sera pas satisfaite, même dans l'hypothèse $\delta_1 = \delta_2 = 0$, on ne pourra faire au sujet des nombres δ_1 et δ_2 qu'un nombre fini d'hypothèses et les équations (4) n'auront qu'un nombre fini de solutions.

Le degré p est donc limité.

Il existe donc des cas très étendus où, comme dans celui que j'ai examiné dans la première partie de ce travail, le degré p est limité et où, par conséquent, le problème de l'intégration algébrique peut être regardé comme résolu.

Valeurs des λ_i.

Les nombres λ_i doivent satisfaire à certaines équations tout fait analogues aux équations (4).

Considérons d'abord un nœud dicritique, nous devrons avoir:

$$(9)\qquad \lambda = \mathrm{S}\,\alpha_i\lambda_i, \qquad 2 = 2\lambda - \sum(\alpha_i - 1)\lambda_i.$$

Les équations (9) tout-à-fait analogues aux équations (4) se discuteraient de la même manière et cette discussion conduirait au même résultat.

Si les inégalités (5) et (8) ont lieu à la fois, les équations (9) admettent une infinité de solutions.

Si l'inégalité a lieu seule, elles peuvent en comporter un nombre fini ou n'en comporter aucune.

Si l'inégalité (5) n'a pas lieu, elles n'en admettent aucune.

Envisageons maintenant un nœud monocritique.

Dans ce cas la première équation (6) doit être remplacée par la suivante:

$$(9^{\text{bis}})\qquad \lambda = \mathrm{S}\,\alpha_i\lambda_i + \varepsilon_1\alpha_1\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + \varepsilon_2\alpha_2\left(\frac{1}{\nu} - 1\right);$$

α_1 est l'exposant du facteur critique, α_2 celui du facteur hypercritique; ε_1 est égal à 0 ou à 1, suivant que le facteur critique correspond ou non à la valeur remarquable envisagée; et ε_2 est defini de la même manière en ce qui concerne le facteur hypercritique.

De même, la seconde équation (9) doit être remplacée par

$$(9^{\text{ter}})\qquad (2\lambda - 2) + \alpha_1\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) + \alpha_2\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = \sum(\alpha_i - 1)\lambda_i.$$

Nous avons q équations (9^{bis}) correspondant aux q valeurs remarquables; en les additionnant on trouve:

$$q\lambda = \sum\alpha_i\lambda_i + \alpha_1\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + \alpha_2\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)$$

et en combinant avec (9^{ter})

$$(10)\qquad \sum\lambda_i = (q-2)\lambda + 2.$$

Soient encore a_1, a_2, ... a_q q nombres positifs tels que

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_q = q - 2.$$

Désignons par λ_k^i les nombres λ_i relatifs à la valeur remarquable C_k, de même que nous avons désigné par n_k^i les nombres n_i relatifs à cette valeur remarquable C_k.

Nous pourrons écrire :

$$\sum \lambda_i = a_1 \sum \alpha_i^1 \lambda_i^1 + a_2 \sum \alpha_i^2 \lambda_i^2 + \ldots + a_q \sum \alpha_i^q \lambda_i^q +$$
$$+ a_1' \alpha_1 \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + a_2' \alpha_2 \left(\frac{1}{\nu} - 1\right) + 2;$$

a_1' est celui des nombres a_k qui se rapporte à la valeur remarquable correspondant au facteur critique et a_2' est défini de même par rapport au facteur hypercritique.

Pour que les équations (9^{bis}) et (9^{ter}) admettent une infinité de solutions, il faut et il suffit que les équations

$$\lambda = \mathrm{S}\, \alpha_i \lambda_i, \qquad 2\lambda = \sum (\alpha_i - 1)\lambda_i$$

admettent des solutions positives; c'est-à-dire que les inégalités (5) et (8) aient lieu.

Si l'on observe maintenant que les nombres λ_i et n_i ne sont pas indépendants, mais qu'ils sont liés par les relations (3) et (3^{bis}), on pourra espérer que nos équations (4), (9^{bis}) et (9^{ter}) n'admettront qu'un nombre fini de solutions *compatibles avec les relations* (3) alors même que les inégalités (5) et (8) auraient lieu.

Mais cet espoir serait trompé en général; on serait conduit à une discussion qu'il est inutile de développer ici et qui conduirait à la résolution d'une équation de Pell ou d'une équation analogue. L'équation de Pell, on le sait, admet une infinité de solutions.

Cas des neuf nœuds dicritiques.

On se trouve donc en présence de difficultés que je n'ai pu encore surmonter. Je me bornerai donc à traiter un cas particulier

simple, où la nature de ces difficultés apparaît clairement, bien qu'on puisse en triompher.

Supposons $m = 4$ et que tous les nœuds soient dicritiques; d'après ce que nous avons vu dans la première partie de ce travail, le genre des courbes $f + C\varphi = 0$ sera égal à 1.

D'autre part, le nombre des points singuliers sera

$$m^2 + m + 1 = 21.$$

Je supposerai que ces 21 points singuliers sont 9 nœuds dicritiques et 12 cols.

Par les 9 nœuds je puis faire passer une cubique. Soit p le degré de la courbe $f + C\varphi = 0$; elle aura avec la cubique $3p$ points d'intersection dont un certain nombre seront confondus avec les nœuds. Si on envisage les neuf nombres λ relatifs aux neuf nœuds et la somme $S\lambda$ de ces neuf nombres, on aura :

$$3p = S\lambda + h,$$

h étant le nombre des points d'intersection mobiles situés en dehors des nœuds.

On aura d'autre part :

$$p^2 = S\lambda^2,$$

d'où :

$$(x^2p^2 + 6xp + 9) = S(x^2\lambda^2 + 2x\lambda + 1) + 2xh,$$

$$(1) \qquad (xp + 3)^2 = S(x\lambda + 1)^2 + 2xh.$$

D'autre part on a, en appelant q le genre de la courbe $f + C\varphi = 0$,

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2} = S\frac{\lambda(\lambda - 1)}{2} + q,$$

ou

$$p^2 - 3p + 2 = S\lambda^2 - S\lambda + 2q,$$

ou enfin

$$2(q-1)+b=0,$$

ce qui conduit à deux solutions :

$$q=1, \quad b=0; \qquad \text{ou} \qquad q=0, \quad b=2.$$

C'est la première qui convient, puisque $q=1$ d'après ce que nous avons vu dans la première partie; on a donc $b=0$ et la cubique n'a pas de point d'intersection mobile avec les courbes $f+C\varphi=0$. L'équation (1) se reduit donc à

$$(xp+3)^2=S(x\lambda+1)^2;$$

et en faisant $x=-\frac{3}{p}$ et multipliant par p^2 :

$$S(3\lambda-p)^2=0,$$

ce qui montre que tous les λ sont égaux entre eux et égaux à $\frac{p}{3}$.

Soient $u_1, u_2, \ldots u_9$ les arguments elliptiques des neuf nœuds sur la cubique; on devra avoir :

$$S\lambda u \equiv 0,$$

c'est-à-dire égale une période (des fonctions elliptiques envisagées). Donc Su est égal à une période divisée par λ, c'est-à-dire par $\frac{p}{3}$.

Si nous connaissons l'équation différentielle, nous connaîtrons les neuf nœuds, nous connaîtrons donc la cubique et les neuf arguments elliptiques u. Nous verrons donc si Su est commensurable avec une période. C'est là une condition nécessaire pour que l'intégration algébrique soit possible.

Supposons-là remplie; le nombre λ est par là-même connu.

Considérons 8 de nos nœuds; peut-on construire une courbe de degré 3λ admettant ces 8 nœuds comme points d'ordre λ?

Une courbe de degré 3λ est déterminée par

$$\frac{3\lambda(3\lambda+3)}{2}$$

points. D'autre part, un point multiple d'ordre λ compte pour

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$$

conditions. Il nous restera donc :

$$\frac{9\lambda(\lambda+1)}{2} - 8\frac{\lambda(\lambda+1)}{2} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$$

points disponibles.

Imposons-nous encore que le neuvième nœud soit un point multiple d'ordre $\lambda - 1$, ce qui fait

$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$$

conditions; il reste

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{2} - \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} = \lambda$$

conditions.

Menons par le neuvième nœud $\lambda - 1$ droites quelconques non tangentes à la cubique et imposons-nous que ces $\lambda - 1$ droites rencontrent la courbe d'ordre 3λ en λ points confondus. De sorte que, ou bien le neuvième nœud sera encore un point multiple d'ordre λ, ou bien ces $\lambda - 1$ droites seront les $\lambda - 1$ tangentes à la courbe au neuvième nœud. Cela fait encore $\lambda - 1$ conditions; il nous restera donc encore un paramètre.

Cela posé, les 9λ points d'intersection de la cubique avec la courbe d'ordre 3λ, seront λ points confondus avec les 8 premiers nœuds, $\lambda - 1$ points confondus avec le neuvième nœud, et un point inconnu.

Soit u_{10} l'argument elliptique de ce point inconnu, on aura :

$$\lambda(u_1 + u_2 + \ldots + u_8) + (\lambda - 1) u_9 + u_{10} = 0.$$

Or, par hypothèse,

$$S\lambda u \equiv 0.$$

Donc :

$$u_9 \equiv u_{10}.$$

Donc le point inconnu se confond avec le neuvième nœud; nous avons donc λ droites, à savoir la tangente à la cubique et les $\lambda - 1$ droites construites plus haut, qui rencontrent la courbe d'ordre 3λ en λ points confondus. Le neuvième nœud est donc un point multiple d'ordre λ de la courbe d'ordre 3λ.

Nous avons donc défini un faisceau de courbes d'ordre 3λ admettant nos 9 nœuds comme points multiples d'ordre λ.

Soit $\psi = 0$ l'une de ces courbes.

Cherchons en quels points cette courbe touche l'une des courbes définies par nos équations différentielles, équations que j'écrirai comme dans la 1ère partie :

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Le lieu des points où une des courbes définies par les équations (2) peut toucher la courbe $\psi = 0$ est

$$L\frac{d\psi}{dx} + M\frac{d\psi}{dy} + N\frac{d\psi}{dz} = 0. \tag{3}$$

Comme par hypothèse L, M et N sont d'ordre 3, et ψ d'o 3λ, le premier membre de (3) est un polynôme homogène d

$$3\lambda + 3.$$

Le nombre total des points d'intersection de (3) et de $\psi = 0$ est donc :

$$9\lambda(\lambda + 1).$$

Considérons maintenant l'un de nos 9 nœuds dicritiques; soient x_0, y_0, z_0 ses coordonnées; nous pourrons toujours supposer que ce point n'est pas sur la droite de l'infini $z = 0$, ce qui nous permettra de supposer $z_0 = 1$.

Développons ψ suivant les puissances de $x - x_0 z$, $y - y_0 z$; il viendra :

$$\psi = \psi_\lambda + \psi_{\lambda+1} + \ldots + \psi_{3\lambda},$$

en appelant ψ_k un ensemble de termes homogènes de degré k en $x - x_0 z$ et $y - y_0 z$, multipliés par $z^{3\lambda-k}$.

Le nœud considéré est un point multiple d'ordre λ de $\psi = 0$ et les directions des λ tangentes sont données par l'équation homogène :

$$\psi_\lambda = 0.$$

Développons de même

$$zL - xN, \qquad zM - yN$$

suivant les puissances croissantes de $x - x_0 z$, $y - y_0 z$; il viendra :

$$zL - xN = Az^4(x - x_0 z) + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4$$

$$zM - yN = Az^4(y - y_0 z) + \eta'_2 + \eta'_3 + \eta'_4,$$

les η_k et les η'_k étant des polynômes homogènes d'ordre k en $x - x_0 z$, $y - y_0 z$ multipliés par z^{5-k}.

Il est à remarquer que le coefficient A est le même dans les deux formules; c'est précisément ce qui caractérise les *nœuds dicritiques*.

Comment trouver les termes du degré le moins élevé en

$(x - x_0 z)$, $(y - y_0 z)$ dans le 1er membre de (3)? Appelons Θ le 1er membre de (3); il viendra :

$$3\lambda\psi = x\frac{d\psi}{dx} + y\frac{d\psi}{dy} + z\frac{d\psi}{dz},$$

d'où :

$$z\Theta - 3\lambda N\psi = (zL - xN)\frac{d\psi}{dx} + (zM - yN)\frac{d\psi}{dy}. \tag{4}$$

Les termes de degré le moins élevé du 2d membre sont évidemment :

$$Az^4\left[(x - x_0 z)\frac{d\psi_\lambda}{dx} + (y - y_0 z)\frac{d\psi_\lambda}{dy}\right] = A\lambda z^4\psi_\lambda.$$

Les termes de degré le moins élevé de N sont $N_0 z^4$; $N_0 z^4$ étant ce que devient N quand on y change x et y en $x_0 z$ et $y_0 z$.

L'ensemble des termes du degré le moins élevé de Θ sera donc :

$$\lambda z^3\psi_\lambda(3N_0 + A).$$

Les λ tangentes à la courbe $\Theta = 0$ sont donc les mêmes que les λ tangentes à la courbe $\psi = 0$.

Le nœud considéré compte donc pour $\lambda(\lambda + 1)$ intersections et les 9 nœuds pour $9\lambda(\lambda + 1)$ intersections.

Donc, ou bien les deux courbes se confondent, ou bien elles n'ont pas d'autre point d'intersection que les nœuds.

Mais il y a plus; je dis que je puis toujours supposer que la courbe $\Theta = 0$ admet nos 9 nœuds comme points multiples d'ordre $\lambda + 1$.

En effet, nous ne changeons pas nos équations différentielles en changeant L, M, N en $L + xH$, $M + yH$, $N + zH$ (H étant un polynôme homogène quelconque du 3ème ordre).

On change ainsi Θ en

$$\Theta + 3\lambda H\psi.$$

Soit u_i l'un de nos 9 nœuds. Soit H_i la valeur que prend H en ce point et soit $3\lambda A_i \psi_\lambda$ l'ensemble des termes de Θ qui sont d'ordre λ en $x - x_0 \zeta$, $y - y_0 \zeta$.

Pour que la courbe

$$\Theta + 3\lambda H\psi = 0$$

admette nos 9 nœuds comme points d'ordre $\lambda + 1$, il faut et il suffit que l'on ait les 9 équations

$$(5) \qquad H_i + A_i = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots 9)$$

Peut-on choisir les 10 coefficients de H de façon à satisfaire à ces 9 équations ? Il ne pourrait y avoir doute que si tous les déterminants formés à l'aide des coefficients de ces 9 équations à 10 inconnues s'annulent tous à la fois. Mais s'il était ainsi, les équations

$$(5^{\text{bis}}) \qquad H_i = 0$$

admettraient une double infinité de solutions. C'est-à-dire qu'on porrait faire passer par nos 9 nœuds un faisceau de cubiques et que Su serait une période.

Mais nous avons supposé que Su étant commensurable avec une période et de telle façon que λ soit le plus petit nombre tel que λSu soit une période. Donc, si $\lambda > 1$, Su n'est pas une période. Donc on peut satisfaire aux équations (5). Donc, on peut toujours supposer que $\Theta = 0$ admet 9 points multiples d'ordre $\lambda + 1$.

Nous admettrons désormais qu'il en est ainsi.

La courbe $\Theta = 0$ est d'ordre $3(\lambda + 1)$ et elle a, en nos 9 nœuds, $9(\lambda + 1)$ points d'intersection avec notre cubique.

Nous sommes donc en présence de deux hypothèses :

1° Ou bien la courbe $\Theta = 0$ se décompose en la cubique et une courbe d'ordre 3λ.

2° Ou bien elle n'a pas d'autre point d'intersection avec la cubique que les nœuds. Mais alors on aurait :

$$(\lambda + 1) Su \equiv 0,$$

et comme on a déjà

$$\lambda S u \equiv 0,$$

il viendrait

$$S u \equiv 0,$$

ce qui est contraire à ce que nous avons supposé, puisque $S u$ n'est pas une période.

La seconde hypothèse doit donc être rejetée.

Donc la courbe $\Theta = 0$ se décompose; et les deux composantes sont, d'une part la cubique, d'autre part une courbe d'ordre 3λ admettant les 9 nœuds comme points multiples d'ordre λ et appartenant par conséquent à notre faisceau.

Soit $F = 0$ l'équation de notre cubique; celle d'une courbe quelconque du faisceau sera

$$a\psi + b F^{\lambda} = 0,$$

a et b étant des coefficients arbitraires; et en effet, la cubique, prise λ fois, fait évidemment partie du faisceau.

On aura donc:

$$\Theta = F(a\psi + b F^{\lambda}).$$

Soit maintenant:

$$\theta = L\frac{dF}{dx} + M\frac{dF}{dy} + N\frac{dF}{dz};$$

θ sera évidemment un polynôme du $6^{\text{ème}}$ degré.

La courbe $\theta = 0$ passe évidemment par chacun des nœuds et sa tangente au nœud est celle de la cubique; on le démontrerait comme plus haut.

Les deux courbes $\theta = 0$ et $F = 0$ ont donc 18 points d'intersection aux nœuds; donc:

Ou bien θ se décompose en deux facteurs dont F.

Ou bien les deux courbes n'ont d'autre point commun que les

nœuds, ce qui entraînerait la congruence

$$2\,Su \equiv 0.$$

Cette congruence n'a pas lieu (si $\lambda > 2$).

Donc θ est divisible par F.

Soit donc

$$\theta = PF,$$

P étant un polynôme du $3^{\text{ème}}$ degré.

Mais nous avons vu plus haut que les termes de degré λ en $x - x_0 z$ et en $y - y_0 z$ dans Θ sont :

$$\lambda z^3 \psi \lambda (3\,N_0 + A).$$

On verrait de même que les termes du 1^{er} degré en $x - x_0 z$ et $y - y_0 z$ dans θ sont

$$\lambda z^3 F_1 (3\,N_0 + A),$$

en représentant par F_1 l'ensemble des termes du 1^{er} degré de F.

Mais, d'après l'hypothèse faite plus haut, chaque nœud sera un point d'ordre $\lambda + 1$ pour $\Theta = 0$ et on a par conséquent :

$$3\,N_0 + A = 0.$$

Donc, les termes du 1^{er} degré de θ disparaissent. Chaque nœud est donc un point double pour $\theta = 0$.

La courbe $P = 0$ passe donc par les 9 nœuds.

Si les cubiques $P = 0$, $F = 0$ étaient distinctes, on aurait donc :

$$Su \equiv 0,$$

ce qui n'a pas lieu. Donc :

$$\theta = cF^2,$$

c étant un coefficient constant.

Nous pouvons alors nous demander s'il est possible, étant donné un polynôme F du $3^{\text{ème}}$ degré, de trouver 3 polynômes L, M, N du $4^{\text{ème}}$ degré, tels que

$$\theta = 3\,F^2.$$

Il est clair que ce problème comporte une infinité de solutions.

Soient P, Q, R trois polynômes quelconques du 2^{d} degré; si nous posons:

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} L &= xF + R\frac{dF}{dy} - Q\frac{dF}{dz} \\ M &= yF + P\frac{dF}{dz} - R\frac{dF}{dx} \\ N &= zF + Q\frac{dF}{dx} - P\frac{dF}{dy}, \end{aligned}$$

il viendra évidemment:

$$L\frac{dF}{dx} + M\frac{dF}{dy} + N\frac{dF}{dz} = 3\,F^2.$$

C'est d'ailleurs la solution la plus générale, comme on s'en assurerait en remarquant que si L', M', N' sont trois polynômes du $4^{\text{ème}}$ degré satisfaisant à l'identité

$$L'\frac{dF}{dx} + M'\frac{dF}{dy} + N'\frac{dF}{dz} = 0,$$

le polynôme L' devra être égal à la somme de $\frac{dF}{dy}$ et de $\frac{dF}{dz}$ multipliés respectivement par deux polynômes du 2^{d} degré.

Cela posé, donnons à nos polynômes L, M, N la forme (α) et cherchons quels seront les points singuliers de nos équations différentielles. Ces points singuliers sont donnés par

$$\frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z}$$

et on voit tout-de-suite qu'ils se divisent en deux catégories.

Nous avons d'abord neuf points satisfaisant aux équations :

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + z\frac{dF}{dz} = 0, \\ xP + yQ + zR = 0. \end{aligned}$$

Nous avons ensuite douze points satisfaisant aux équations :

$$\frac{P}{\frac{dF}{dx}} = \frac{Q}{\frac{dF}{dy}} = \frac{R}{\frac{dF}{dz}}.$$

Les neuf premiers points sont sur la cubique F; ce sont eux qui devraient être nos neufs nœuds dicritiques.

Ils sont à l'intersection de $F = 0$ avec une autre cubique. On aura donc :

$$Su \equiv 0.$$

Le faisceau $f + C\varphi = 0$ devra alors se réduire à un faisceau de cubiques

$$F + CF_1 = 0,$$

de telle façon que $\lambda = 1$.

On pourrait, il est vrai, se demander si on ne peut pas faire passer par ces 9 nœuds trois courbes de degré 3λ, linéairement indépendantes et admettant les 9 nœuds comme points multiples d'ordre λ.

On aurait alors non plus un faisceau mais un *réseau* de courbes d'ordre 3λ, et l'équation de ce réseau pourrait se mettre sous la forme :

$$F^\lambda + C'F_1^\lambda + C''\Phi = 0,$$

où C' et C'' seraient des constantes arbitraires et Φ un polynôme d'ordre 3λ indécomposable.

Mais cela est impossible; soit en effet M un point quelconque du plan; par ce point passeraient une infinité de courbes du réseau,

formant un faisceau. Deux quelconques de ces courbes se couperaient en $9\lambda^2$ points aux nœuds et en un point au point M. En tout $9\lambda^2 + 1$ points d'intersection. Cela est absurde, puisque les deux courbes sont d'ordre 3λ.

Ainsi nous devons conclure que $\lambda = 1$.

Nous avons, il est vrai, laissé de côté un cas; celui ou λ serait égal à 2, où l'on aurait par conséquent :

$$2 \sum n = 0$$

et où la courbe $\theta = 0$, au lieu de se décomposer en deux cubiques dont l'une serait $F = 0$, serait tangente aux neuf nœuds à $F = 0$.

Dans ce cas on peut construire un faisceau de courbes du $6^{\text{ème}}$ degré admettant les neuf nœuds comme points doubles. Soit $f_1 + C f_2 = 0$ l'équation de ce faisceau. On peut, quel que soit p, construire un faisceau de courbes de degré $6p$ admettant les neuf nœuds comme points multiples d'ordre $2p$. L'équation de ce faisceau est

$$f_1^p + C f_2^p = 0.$$

Mais on ne peut pas, pour la même raison que tout à l'heure, construire un réseau de pareilles courbes.

On peut donc supposer $p = 1$ et par conséquent le faisceau $f + C\varphi = 0$ ne pourrait être autre chose que le faisceau du $6^{\text{ème}}$ degré que nous venons de construire.

Supposons donc $\lambda = 2$.

L'équation du faisceau peut se mettre sous la forme :

$$F^2 + C\varphi = 0,$$

φ étant du $6^{\text{ème}}$ degré.

La valeur $C = 0$ est alors une valeur remarquable de C.

Les équations connues :

$$m + 2 = 2p - \sum (\alpha_i - 1) n_i$$

$$2 = 2\lambda - \sum (\alpha_i - 1) \lambda_i$$

deviennent alors :

$$6 = 6\lambda - (\lambda - 1)3 - {\sum}'(\alpha_i - 1)n_i,$$

$$2 = 2\lambda - (\lambda - 1) - {\sum}'(\alpha_i - 1)\lambda_i,$$

le signe ${\sum}'$ représentant une sommation s'étendant à tous les facteurs u_i correspondant à toutes les valeurs critiques de C autres que $C = 0$.

Mais si $\lambda = 2$, la dernière de ces équations se réduit à

$${\sum}'(\alpha_i - 1)\lambda_i = 1.$$

Cette équation ne peut être satisfaite que d'une seule manière. Il ne doit y avoir, en dehors de $C = 0$, qu'une seule valeur critique pour laquelle on aura :

$$\lambda_i = 1, \qquad \alpha_i = 2.$$

D'autre part, la première équation donne :

$${\sum}'(\alpha_i - 1)n_i = 3;$$

ou, puisqu'il n'y a qu'une seule valeur critique et que $\alpha_i = 2$:

$$n_i = 3.$$

Ainsi, pour cette valeur critique, $F^2 + C\varphi$ doit se réduire au carré d'un polynôme du $3^{\text{ème}}$ degré, F_1, de sorte que la cubique $F_1 = 0$ passe par nos neuf nœuds. On aura donc :

$$Su \equiv 0,$$

ce qui nous ramène au cas précédent.

Ainsi, dans ce cas très particulier, que j'ai étudié peut être un peu longuement, nous sommes parvenus à limiter le degré des courbes algébriques $f + C\varphi = 0$; mais pour cela les considérations

purement arithmétiques ne nous ont pas suffi; nous avons dû recourir au théorème d'Abel, qui nous a appris que

$$\lambda S u \equiv 0.$$

Cette circonstance doit nous faire mieux comprendre la nature des difficultés à vaincre.

Étude des points singuliers.

Dans le voisinage d'un point singulier, il existe deux séries que nous avons appelées X_1 et X_2 et qui sont ordonnées suivant les puissances de $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}$, $\frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$ (loco citato, p. 165). Réciproquement, on peut égaler les différences

$$\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}, \qquad \frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$$

à des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de X_1 et de X_2.

Soit alors

$$\frac{f}{\varphi} = \text{constante}$$

l'intégrale générale de notre équation différentielle. Si nous divisons le numérateur et le dénominateur par z^p, les quotients $\frac{f}{z^p}$ et $\frac{\varphi}{z^p}$ seront des polynômes entiers par rapport aux différences $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}$, $\frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$; ce seront donc des séries ordonnées sui
sances croissantes de X_1 et de X_2. Soient S_1 et S_2
aurons :

$$\frac{f}{z^p} = S_1, \qquad \frac{\varphi}{z^p} = S_2$$

et notre intégrale générale s'écrira :

$$\frac{S_1}{S_2} = \text{constante.}$$

Supposons d'abord que notre point singulier soit un nœud dicritique; l'intégrale générale de l'équation pourra s'écrire :

$$\frac{X_1}{X_2} = \text{constante.}$$

Donc $\frac{S_1}{S_2}$ est une fonction de $\frac{X_1}{X_2}$; elle ne change donc pas quand on multiplie X_1 et X_2 par une même constante k. Si donc je désigne par S_1^p et S_2^p les groupes de termes homogènes de degré p dans S_1 et dans S_2, nous aurons :

$$\frac{kS_1^1 + k^2S_1^2 + k^3S_1^3 + \dots}{kS_2^1 + k^2S_2^2 + k^3S_2^3 + \dots} = \frac{S_1^1 + S_1^2 + S_1^3 + \dots}{S_2^1 + S_2^2 + S_2^3 + \dots}.$$

Le premier membre doit donc être indépendant de k.

D'autre part, $S_1^1, S_1^2, \dots S_1^{\lambda-1}$ doivent s'annuler ainsi que $S_2^1, S_2^2, \dots S_2^{\lambda-1}$, tandis que S_1^λ et S_2^λ sont différents de zéro; et en effet les courbes $f + C\varphi = 0$ doivent avoir au point considéré un point multiple d'ordre λ à tangentes distinctes.

On aura donc, quel que soit k :

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{k^\lambda S_1^\lambda + k^{\lambda+1}S_1^{\lambda+1} + \dots}{k^\lambda S_2^\lambda + k^{\lambda+1}S_2^{\lambda+1} + \dots}$$

ou, en faisant tendre k vers zéro :

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{S_1^\lambda}{S_2^\lambda}.$$

Ainsi : *la fraction rationnelle* $\frac{f}{\varphi}$ *est le quotient de deux polynômes entiers homogènes d'ordre* λ *en* X_1 *et* X_2.

Considérons maintenant un nœud monocritique : l'intégrale gé-

nérale est alors de la forme :

$$\frac{X_1^\mu}{X_2^\nu} = \text{constante}.$$

Le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ ne doit donc pas changer quand on change X_1 et X_2 en $X_1 k^\nu$ et $X_2 k^\mu$. Soit alors

$$A X_1^m X_2^n$$

un terme quelconque de l'une des séries S_1 ou S_2 ; ce terme se changera en

$$A X_1^m X_2^n k^{m\nu+n\mu};$$

je dirai alors qu'il est de la classe $m\nu + n\mu$. Soient alors S_1^p et S_2^p l'ensemble des termes de classe p de S_1 et de S_2 ; nous aurons encore :

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{k S_1^1 + k^2 S_1^2 + \ldots}{k S_2^1 + k^2 S_2^2 + \ldots}.$$

Comme la courbe $f + C\varphi = 0$ doit présenter λ branches de courbes de la forme

$$X_1^\mu = \gamma X_2^\nu$$

passant au point considéré (cfr. loco citato, p. 170), les premiers termes qui ne s'annuleront pas au numérateur et au dénominateur de la fraction précédente seront les termes $k^{\lambda\mu\nu} S_1^{\lambda\mu\nu}$ et $k^{\lambda\mu\nu} S_2^{\lambda\mu\nu}$, de sorte que nous aurons, quel que soit k :

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{k^{\lambda\mu\nu} S_1^{\lambda\mu\nu} + \ldots}{k^{\lambda\mu\nu} S_2^{\lambda\mu\nu} + \ldots}$$

et en faisant $k = 0$:

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{S_1^{\lambda\mu\nu}}{S_2^{\lambda\mu\nu}}.$$

Ainsi : *la fraction rationnelle* $\frac{f}{\varphi}$ *est le quotient de deux polynômes entiers homogènes d'ordre* λ *en* X_1^μ *et* X_2^ν.

Il reste à examiner le cas d'un col qui est un peu plus compliqué.

Si l'intégration algébrique est possible, les séries X_1 et X_2 existent certainement encore; l'intégrale générale devient :

$$X_1^\mu X_2^\nu = \text{constante}.$$

Donc, $\frac{S_1}{S_2}$ ne change pas quand on change X_1 en $k^\nu X_1$ et X_2 en $k^{-\mu} X_2$. Un terme en $X_1^m X_2^n$ est alors multiplié par $k^{m\nu-n\mu}$ et peut être appelé de classe $m\nu - n\mu$; seulement il peut y avoir des termes de classe négative.

Soit encore :

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{\sum k^p S_1^p}{\sum k^p S_2^p}.$$

Le numérateur, comme le dénominateur, sont developpables (pour les valeurs de k voisines de 1) suivant les puissances positives ou négatives de k; il en est de même de

$$f \sum k^p S_2^p - \varphi \sum k^p S_1^p = 0.$$

Cette fonction de k devant être identiquement nulle ne peut l'être que si tous les coefficients du développement sont nuls; on a donc :

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{S_1^p}{S_2^p},$$

en choisissant p de telle façon que S_1^p ne soit pas identiquement nul. Seulement ici S_1^p et S_2^p peuvent contenir une infinité de termes. Ce ne sont plus des polynômes, ce sont des séries.

Soit M_1 un nœud quelçonque; soient μ_1 et ν_1 ses entiers caractéristiques; X_1^1, X_2^1 les deux séries X_1 et X_2 correspondantes. Nous

pourrons toujours former ces deux séries si nous connaissons l'équation différentielle. Ces deux séries convergeront dans un certain domaine D_1 ; soit ensuite Δ_1 un domaine plus étendu que D_1 ; nous pourrons encore définir dans ce domaine les deux fonctions X_1^1 et X_2^1 par le procédé de la continuation analytique.

Soit M_2 un second nœud, μ_2 et ν_2 ses entiers caractéristiques; X_1^2 et X_2^2 les deux séries X_1 et X_2 correspondantes; elles convergeront dans un certain domaine D_2 et on pourra, par continuation analytique, définir les fonctions X_1^2 et X_2^2 dans un domaine plus étendu Δ_2.

Supposons que Δ_1 et Δ_2 aient une partie commune; dans cette partie commune les quatre fonctions X_1^1, X_2^1, X_1^2, X_2^2 seront définies; et nous devrons avoir une relation entre

$$Z_1 = \frac{(X_1^1)^{\mu_1}}{(X_2^1)^{\nu_1}} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{(X_1^2)^{\mu_2}}{(X_2^2)^{\nu_2}}.$$

Dans le cas où l'intégration algébrique est possible, on voit quelle est la forme de cette relation; la fonction $\frac{f}{\varphi}$ doit être une fonction rationnelle de Z_1 d'une part, de Z_2 d'autre pait.

Il faut donc qu'une fonction rationnelle de Z_1 soit égale à une fonction rationnelle de Z_2.

Soit x_0, y_0, z_0 un point de la partie commune à Δ_1 et à Δ_2; connaissant nos quatre fonctions X dans cette partie commune par continuation analytique, nous saurons développer Z_1 et Z_2 suivant les puissances de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$; soit Z_1^0 et Z_2^0 les valeurs de Z_1 et Z_2 au point x_0, y_0, z_0; nous saurons développer $Z_2 - Z_2^0$ suivant les puissances de $Z_1 - Z_1^0$.

Nous aurons donc la relation cherchée entre Z_1 et Z_2 sous une forme où entre une série infinie; mais cela ne nous permet pas encore de reconnaître si on peut la mettre sous la forme d'une égalité entre deux fonctions rationnelles.

Introduction des Fonctions Fuchsiennes.

Considérons d'abord un nœud dicritique et supposons que nous donnions : 1° les valeurs remarquables C_1, C_2, ... C_q;

nombre λ; 3° les nombres λ_i et les exposants α_i relatifs aux différents facteurs correspondant aux q valeurs remarquables.

Soit M_k l'un des communs multiples des exposants α_i correspondant à la valeur remarquable C_k.

Construisons un polygône fuchsien R_0 de la 1ère famille et du 1er genre; supposons que nous ayons $2q-2$ sommets répartis en q cycles. Le premier cycle comprendra un seul sommet A_1, le second, le troisième, etc., et l'avant dernier cycles comprendront chacun deux sommets que j'appellerai A_2 et A'_2, A_3 et A'_3, ..., A_{q-1} et A'_{q-1}; le dernier cycle comprendra un seul sommet A_q. La somme des angles du $k^{\text{ème}}$ cycle sera $\frac{2\pi}{M_k}$ et il y aura une fonction fuchsienne qui sera égale à C_k au point A_k. Soit $F(\zeta)$ cette fonction fuchsienne; égalons-là à $-\frac{f}{\varphi}$ et écrivons :

$$F(\zeta) = -\frac{f}{\varphi}.$$

Nous avons vu plus haut que $\frac{f}{\varphi}$ devait être une fonction rationnelle du rapport $\frac{X_1}{X_2}$ que j'appellerai Z; nous aurons donc :

$$F(\zeta) = R(Z),$$

R désignant une fonction rationnelle. Je dis que Z sera une fonction uniforme de ζ.

Si, en effet, $F(\zeta)$ décrit un contour fermé, plusieurs valeurs de Z ne pourront s'échanger que si ce contour contient l'un des points C_k; et si on tourne autour d'un point C_k et que α_k^1, α_k^2, ... α_k^p soient les exposants correspondants nous verrons s'échanger, par permutation circulaire, d'une part λ_k^1 groupes de α_k^1 valeurs, d'autre part λ_k^2 groupes de α_k^2 valeurs, etc.

Si ζ décrit un contour fermé, il faut d'abord que ce contour enveloppe un des sommets de R_0, pour que $F(\zeta)$ tourne autour d'un des points C_k. Si ζ tourne autour d'un sommet, $F(\zeta)$ tourne

M_k fois autour de C_k et comme M_k est multiple de tous les exposants α_k^i, Z revient à la même valeur.

Donc Z est fonction uniforme de ζ. C. Q. F. D.

Or Z, pour une même valeur de $F(\zeta)$, peut prendre λ valeurs. Considérons donc λ polygônes fuchsiens congruents à R_0, que j'appellerai

$$R_0,\ R_1,\ \ldots\ R_{\lambda-1}.$$

L'ensemble de ces polygônes constituera un polygône fuchsien S_0. Ce polygône S_0, en associant convenablement ses côtés en paires de côtés conjugués, engendrera un groupe fuchsien dont les substitutions n'altéreront pas Z.

Donc Z est fonction fuchsienne de ζ.

La surface du polygône R_0 (au point de vue de la géométrie non euclidienne) sera :

$$q-2-\sum\frac{1}{M_k}$$

(en prenant pour unité celle du quadrilatère dont les 4 angles sont nuls). Celle de S_0 devra donc être :

$$\lambda\left[q-2-\sum\frac{1}{M_k}\right].$$

D'autre part, le nombre des cycles de sommets de S_0 sera en général

$$\sum\lambda_k.$$

Ce nombre pourrait se réduire si la somme des angles relatifs à un de ces cycles était égale a 2π; on pourrait alors assembler les polygônes R_k de façon à faire disparaitre ce cycle. Mais cette somme d'angles est égale à

$$2\pi\frac{\alpha_i}{M_k},$$

α_i et M_k étant les nombres α_i et M_k correspondant au cycle

sagé. Mais comme M_k est un commun multiple *quelconque* des α_i, je pourrai toujours supposer $M_k > \alpha_i$.

Nous pouvons donc toujours supposer que le nombre des cycles de S_0 est précisément $\sum \lambda_i$.

Quel est le nombre des côtés? Le polygône R_0 a $2q-2$ côtés; quand on y annexe R_1, on a en tout $2(2q-2)$ côtés; mais comme R_0 a un côté commun avec R_1 et que cette paire de côtés disparait, il reste pour le polygône $R_0 + R_1$ un nombre de côtés égal à

$$2(2q-2)-2.$$

Annexons encore R_2, nous ajoutons $2q-2$ côtés; mais R_2 a au moins un côté commun avec $R_0 + R_1$; cela fait une paire de côtés à supprimer et il reste

$$3(2q-2)-2.2$$

côtés pour le polygône $R_0 + R_1 + R_2$. Ce nombre doit être diminué si R_2 a plus d'un côté commun avec $R_0 + R_1$.

En général S_0 aura:

$$\lambda(2q-2)-2\lambda+2$$

côtés, si R_i n'a qu'un côté commun

$$R_0 + R_1 + \ldots + R_{i-1}.$$

Dans le cas contraire ce nombre devrait être diminué.

En général le nombre des côtés sera

$$\lambda(2q-2)-2\lambda+2-2b,$$

b étant un entier positif ou nul.

D'après une formule que j'ai donnée dans les *Acta Mathematica*, tome I, on a, si $2n$ est le nombre des côtés, q le nombre des cycles, p le genre du polygône fuchsien:

$$p = \frac{n+1-q}{2}.$$

Nous aurons donc ici

$$p = \frac{\lambda(q-1) - \lambda + 2 - h - \sum \lambda_i}{2},$$

ou

$$2p + h = \lambda(q-2) + 2 - \sum \lambda_i.$$

Or nous avons trouvé plus haut

$$\sum \lambda_i = \lambda(q-2) + 2.$$

On a donc

$$2p + h = 0.$$

Or les nombres p et h sont positifs ou nuls; on a donc :

$$p = 0, \qquad h = 0.$$

Ainsi : *le genre du polygône fuchsien S_0 est nul et le nombre de ses côtés est* $2\lambda(q-2) + 2$.

Il faudrait rechercher maintenant comment sont assemblés les divers polygônes partiels R_k dont l'ensemble compose S_0, et comment les côtés de S_0 sont conjugués deux à deux.

Je désignerai par $A_{i.k}$ et $A'_{i.k}$ les sommets du polygône R_k qui sont homologues aux sommets $A_i = A_{i.0}$ et $A'_i = A'_{i.0}$ du polygône R_0.

Considérons alors le côté $A_{1.k} A'_{2.k}$; ou bien il coïncidera avec un côté $A_{1.h} A_{2.h}$ du polygône R_h, les deux polygônes R_k et R_h ayant un côté commun; ou bien ce sera un côté de S_0, mais alors il sera conjugué d'un autre côté $A_{1.h} A_{2.h}$ de S_0.

Dans l'un et l'autre cas, je dirai que l'indice h est le conséquent de l'indice k, et l'indice k l'antécédent de l'indice h. Chacun de nos λ indices aura ainsi un conséquent et un antécédent.

Considérons alors la substitution T_1 qui change chacun de ces indices en son conséquent. C'est une substitution de λ lettres, et si

$$\alpha_1^1, \alpha_1^2, \ldots \alpha_1^i, \ldots$$

$$\lambda_1^i, \ldots$$

sont les nombres α_i et λ_i relatifs à la valeur remarquable C_2, les λ lettres se répartiront en λ_2^1 groupes de α_2^1 lettres, ... en λ_2^i groupes de α_2^i lettres, ..., et la substitution T_2 permutera circulairement les lettres de chaque groupe.

Considérons maintenant le côté $A'_{2k} A'_{3k}$; il coincidera avec un côté $A_{2k} A_{3k}$ de R_k, ou bien il sera un côté de S_0 et sera conjugué du côté $A_{2k} A_{3k}$.

Dans les deux cas, définissant les conséquents à un nouveau point de vue, je dirai que h est le conséquent de k.

J'appellerai T_2 la substitution de λ lettres qui change chaque indice en son conséquent.

On définirait de même les substitutions T_3, T_4, ... T_{q-1} qui correspondent aux côtés $A'_2 A'_3$, $A'_3 A'_4$, ... $A'_{q-1} A'_q$ de la même façon que T_1 et T_2 correspondent aux côtés $A_1 A'_2$ et $A'_2 A'_3$.

Les $q - 1$ substitutions T_k devront satisfaire à certaines conditions. Nous avons déjà vu quelles sont celles que doit remplir T_1 et comment les lettres doivent se répartir en groupes tels que T_1 permute circulairement les lettres d'un même groupe.

Soient maintenant

$$\alpha_k^1, \alpha_k^2, \ldots \alpha_k^K$$

$$\lambda_k^1, \lambda_k^2, \ldots \lambda_k^K$$

les nombres α_i et λ_i relatifs à la valeur C_k.

On pourra répartir les λ indices en groupes tels que la substitution $T_{k-1} T_k^{-1}$ permute circulairement les lettres d'un même groupe.

Nous devrons avoir λ_k^1 groupes de α_k^1 lettres, λ_k^2 groupes de α_k^2 lettres,... λ_k^K groupes de α_k^K lettres ($k = 2, 3, \ldots q - 1$).

Soient enfin

$$\alpha_q^1, \alpha_q^2, \ldots \alpha_q^Q$$

$$\lambda_q^1, \lambda_q^2, \ldots \lambda_q^Q$$

les nombres α_i et λ_i relatifs à la valeur C_q.

Les λ indices pourront se répartir en groupes tels que T_{q-1} permutent circulairement les lettres d'un même groupe.

Nous devons avoir λ_q^1 groupes de α_q^1 lettres, ..., λ_q^Q groupes de α_q^Q lettres.

Une question se pose alors; existe-t-il des substitutions T satisfaisant à toutes ces conditions ? et par conséquent existe-t-il un polygône S_0 ?

Nous avons vu plus haut que $\dfrac{f}{\varphi}$ devait être une fonction rationnelle de $Z = \dfrac{X_1}{X_2}$:

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{P(X_1, X_2)}{Q(X_1, X_2)},$$

P et Q étant deux polynômes homogènes d'ordre λ.

Soit C_k une valeur remarquable quelconque, A_k et B_k deux constantes telles que $B_k = A_k C_k$. Alors le polynôme :

$$A_k P + B_k Q$$

devra se décomposer en facteurs, et l'on aura :

$$(1) \qquad A_k P + B_k Q = U_1^{\alpha_k^1} U_2^{\alpha_k^2} \dots U_K^{\alpha_k^K},$$

U_h étant un polynôme d'ordre λ_k^h.

La question proposée revient alors à la suivante. Peut-on toujours trouver des polynômes P et Q satisfaisant aux conditions (1) ?

Nous disposons des indéterminées suivantes :

1° Les $2\lambda + 2$ coefficients des polynômes P et Q.

2° Les q constantes A_k, d'où l'on déduit les q constantes B_k par les équations $B_k = A_k C_k$; les C_k sont supposés donnés.

3° Les $\sum(\lambda_i + 1)$ coefficients des facteurs U.

D'autres part, nous avons à satisfaire aux conditions (1) qui sont des identités entre deux polynômes d'ordre λ.

Chacune d'elles correspond donc à $\lambda + 1$ conditions; cela fait donc en tout $q(\lambda + 1)$ conditions.

Si donc nous appelons N le nombre total des facteurs U_i, d
telle sorte que

$$\sum(\lambda_i + 1) = \sum \lambda_i + N,$$

nous avons

$$N + 2\lambda + 2 + q + \sum \lambda_i$$

paramètres qui doivent satisfaire à $q(\lambda + 1)$ conditions; il no
reste donc

$$N + 2\lambda + 2 + q + \sum \lambda_i - q(\lambda + 1)$$

paramètres arbitraires. Or, en vertu des équations :

$$q\lambda = \sum \alpha_i \lambda_i, \qquad 2\lambda + \sum(\alpha_i - 1)\lambda_i = 2,$$

ce nombre se réduit à $4 + N$.

Remarquons que les équations (1) sont homogènes si on
regarde :

1° les coefficients de P et Q comme étant d'ordre λ,

2° les constantes A_k comme étant d'ordre λ,

3° les coefficients d'un facteur U_i de degré λ_i comme étai
d'ordre $2\lambda_i$.

En effet, il est aisé de vérifier qu'en adoptant cette conventic
les deux membres de (1) sont homogènes d'ordre 2λ.

Mais il y a plus, ces équations (1) sont doublement homogène
je veux dire que, si ξ et η désignent deux indéterminées, elles i
changent pas quand on change

$$(2) \qquad A_k, \quad P, \quad Q, \quad U_i$$

en

$$(3) \qquad A_k \xi^\lambda, \quad P\eta^\lambda, \quad Q\eta^\lambda, \quad U_i \xi^{\lambda_i} \eta^{\lambda_i}.$$

Adjoignons aux équations (1) d'autres relations en nomb

$N + 2$ entre nos inconnues; je suppose que ces nouvelles relations présentent la même homogénéité double que les équations (1); c'est-à-dire ne changent pas quand les quantités (2) se changent dans les quantités (3).

Nous avons alors $N + 2 + q(\lambda + 1)$ équations homogènes; le nombre total des inconnues est $N + 4 + q(\lambda + 1)$; mais ces équations étant doublement homogènes sont en réalité des équations entre les rapports des coefficients des $A_k P$ et des $A_k Q$ élevés à la puissance $\frac{1}{\lambda}$ et des coefficients des U_i élevés à la puissance $\frac{1}{\lambda_i}$. Le nombre de ces rapports *réellement distincts* est seulement $N + 2 + q(\lambda + 1)$. Nous avons donc autant d'équations que d'inconnues et comme des équations homogènes ne sont jamais impossibles, nous pourront toujours en tirer nos inconnues.

Ainsi, si les équations (1) sont distinctes, les rapports de nos inconnues dépendront de $N + 2$ paramètres arbitraires et nos inconnues elles-mêmes de $N + 4$ paramètres.

Si les équations (1) n'étaient pas distinctes, les inconnues dépendraient de plus de $N + 4$ paramètres.

Il semble donc que notre problème comporte toujours une infinité de solutions. Mais il importe d'observer que ces solutions ne sont pas réellement distinctes.

En effet, si dans les polynômes P, Q et U_i on remplace X_1 et X_2 par

$$\alpha X_1 + \beta X_2 \quad \text{et} \quad \gamma X_1 + \delta X_2,$$

les équations (1) ne cesseront pas d'être satisfaites. Or cette transformation dépend de 4 paramètres α, β, γ, δ. Donc voilà une quadruple infinité de solutions qui ne diffèrent pas essentiellement les unes des autres.

D'autre part, l'équation (1) ne change pas si l'on y change

$$U_1, \quad U_2, \ \dots \quad U_K, \ A_k$$

en

$$\mu_1 U_1, \ \mu_2 U_2, \ \dots \ \mu_K U_K, \ A_k \mu_1^{\alpha_1^k} \mu_2^{\alpha_2^k} \dots \mu_K^{\alpha_K^k}.$$

Voilà une transformation qui dépend des K paramètres μ; comme nous pouvons opérer de même sur nos q équations (1), cela nous fait autant de paramètres μ que de facteurs U, c'est-à-dire N. En tenant compte de α, β, γ, δ, cela fait une transformation dépendant de $N+4$ paramètres.

Nous aurons donc une $(N+4)^{\text{ple}}$ infinité de solutions qui ne différeront pas essentiellement les unes des autres.

Si donc les équations (1) sont distinctes, le problème ne comportera qu'un nombre fini de solutions essentiellement différentes.

Maintenant, les équations (1) sont-elles distinctes? La considération des fonctions fuchsiennes permet de l'affirmer.

Si, en effet, les valeurs remarquables C_k sont données, on pourra construire d'une seule manière le polygône fuchsien R_0; on pourra ensuite assembler *d'un nombre fini de manières* λ polygônes

$$R_0, \quad R_1, \ldots R_{\lambda-1}$$

pour former le polygône S_0.

C'est parmi les polygônes S_0 ainsi formés, en nombre fini, qu'il faut choisir ceux qui conviennent à la question. Les considérations qui précèdent montrent qu'il y en aura toujours, mais il ne peut y en avoir qu'un nombre fini.

En résumé, si l'on se donne les valeurs remarquables C_k, si l'on se donne les entiers λ et λ_i assujettis seulement aux conditions

$$\lambda = \mathrm{S}\,\alpha_i\lambda_i, \qquad 2\lambda - \sum(\alpha_i - 1)\lambda_i = 2,$$

on pourra toujours former les polynômes P et Q et le polygône S_0 et on ne pourra le faire que d'un nombre fini de manières.

Extension aux nœuds monocritiques.

Considérons un nœud monocritique; soient X_1 et X_2 les deux séries correspondantes, et soit

$$Z = \frac{(X_1)^\mu}{(X_2)^\nu}.$$

Nous avons vu plus haut que $-\frac{f}{\varphi}$ est une fonction rationnelle de Z dont le numérateur et le dénominateur sont d'ordre λ:

$$-\frac{f}{\varphi} = R(Z).$$

Soit C_k une valeur remarquable; lorsque $-\frac{f}{\varphi}$ tournera autour de C_k, les λ valeurs de Z tirées de l'équation qui précède s'échangeront entre elles. Soit u_i un facteur de $f + C_k \varphi$; soient λ_i et α_i les deux nombres correspondants; si ce facteur n'est pas singulier, nous aurons λ_i groupes de α_i valeurs de Z, et les valeurs de chacun de ces groupes s'échangeront circulairement quand $-\frac{f}{\varphi}$ tournera autour de C_k.

Si le facteur est critique, α_i est divisible par μ; nous avons alors $\lambda_i - 1$ groupes de α_i valeurs de Z et 1 groupe de $\frac{\alpha_i}{\mu}$ valeurs qui s'échangent circulairement.

Si le facteur est hypercritique, α_i est divisible par ν et nous avons $\lambda_i - 1$ groupes de α_i valeurs et 1 groupe de $\frac{\alpha_i}{\nu}$ valeurs qui s'échangent circulairement.

Si enfin le facteur est doublement singulier, α_i est divisible par $\mu\nu$ et nous avons $\lambda_i - 2$ groupes de α_i valeurs, 1 groupe de $\frac{\alpha_i}{\mu}$ valeurs et 1 groupe de $\frac{\alpha_i}{\nu}$ valeurs qui s'échangent circulairement.

Formons encore le polygône R_0 et formons la fonction fuchsienne $F(\zeta)$. Posons:

$$F(\zeta) = R(Z).$$

Z sera encore une fonction fuchsienne de ζ.

Le polygône S_0 correspondant sera formé de λ pol[illegible]

$$R_0, \quad R_1, \quad \ldots \quad R_{\lambda-1}.$$

Le nombre des cycles de sommets est encore $\sum \lambda_i$.
Celui des côtés sera

$$\lambda(2q-2)-2\lambda+2-2b,$$

b étant positif ou nul. On en déduit, p étant le genre de S_0:

$$2p+b=\lambda(q-2)+2-\sum \lambda_i.$$

Revenons aux formules qui, dans la première partie de ce travail, remplissent les lignes 6 à 12 de la page 175. Pour chaque noeud monocritique, nous aurons q de ces formules, correspondant aux q valeurs remarquables; additionnons-les, il viendra :

$$q\lambda=\sum \alpha_i\lambda_i+\alpha_1\left(\frac{1}{\mu}-1\right)+\alpha_2\left(\frac{1}{\nu}-1\right).$$

Nous avons trouvé d'autre part, page 175, formule (δ) :

$$(2\lambda-2)+\alpha_1\left(1-\frac{1}{\mu}\right)+\alpha_2\left(1-\frac{1}{\nu}\right)=\sum(\alpha_i-1)\lambda_i;$$

on tire de là :

$$\lambda(q-2)+2=\sum \lambda_i,$$

d'où

$$2p+b=0,$$

et comme p et b ne peuvent être négatifs :

$$p=b=0.$$

On définirait comme précédemment les substitutions :

$$T_1,\quad T_2,\quad \dots,\quad T_{q-1}$$

et pour chacune des substitutions

$$T_1, \quad T_2 T_1^{-1}, \quad T_3 T_2^{-1}, \ldots, \quad T_q T_{q-1}^{-1}, \quad T_q$$

nous savons comment les λ indices se répartissent en groupes de lettres se permutant circulairement. Chacun de ces groupes correspondra d'ailleurs à un cycle de sommets du polygône S_0.

Pourra-t-on toujours former un polygône S_0 satisfaisant à toutes ces conditions ?

Nous aurons encore :

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{P(X_1^\mu, X_2^\nu)}{Q(X_1^\mu, X_2^\nu)},$$

P et Q étant deux polynômes homogènes d'ordre λ.

Nous aurons encore

$$(1) \qquad A_k P + B_k Q = U_1^{\alpha_k^1} U_2^{\alpha_k^2} \ldots U_K^{\alpha_k^K}.$$

Cependant, si le facteur U_1, par exemple, était critique, il faudrait dans le 2^d^ membre de (1) remplacer $U_1^{\alpha_k^1}$ par

$$(X_1^\mu)^{\frac{\alpha_k^1}{\mu}} U_1'^{\alpha_k^1},$$

U_1' étant un polynôme homogène d'ordre $\lambda_k^1 - 1$. S'il était hypercritique, il faudrait remplacer $U_1^{\alpha_k^1}$ par

$$(X_2^\nu)^{\frac{\alpha_k^1}{\nu}} U_1'^{\alpha_k^1};$$

et s'il était doublement singulier, il faudrait remplacer $U_1^{\alpha_k^1}$ par

$$(X_1^\mu)^{\frac{\alpha_k^1}{\mu}} (X_2^\nu)^{\frac{\alpha_k^1}{\nu}} U_1'^{\alpha_k^1},$$

U_1' étant un polynôme homogène d'ordre $\lambda_k^1 - 2$.

De combien d'indéterminées disposons-nous?

1° Des $2\lambda + 2$ coefficients de P et de Q.

2° Des q constantes A_i.

3° Des coefficients des polynômes U_i et U'_i.

Ces coefficients sont au nombre de $\lambda_i + 1$ pour un polynôme U_i, de λ_i pour un polynôme U'_i simplement singulier, de $\lambda_i - 1$ pour un polynôme U'_i doublement singulier.

Le nombre total est donc

$$\sum(\lambda_i + 1) - 2 = \sum \lambda_i + N - 2,$$

en appelant N le nombre total des facteurs.

Nous avons donc en tout

$$N + 2\lambda + q + \sum \lambda_i$$

indéterminées.

D'autre part, nous avons q équations (1) qui équivalent à $q(\lambda + 1)$ conditions, de sorte qu'il reste

$$N + 2\lambda - q\lambda + \sum \lambda_i$$

paramètres arbitraires.

En vertu de l'équation

$$\sum \lambda_i = (q-2)\lambda + 2$$

ce nombre se réduit à $N + 2$.

Si donc les équations (1) sont distinctes, le problème comporte une $(N+2)^{\text{ple}}$ infinité de solutions.

Mais d'une solution on peut en déduire une $(N+2)^{\text{ple}}$ infinité d'autres. On peut, en effet, sans cesser de satisfaire aux équations (1):

1° changer X_1^μ et X_2^ν

en αX_1^μ et βX_2^ν;

2° changer $U_1, \quad U_2, \ldots, \acute{U}_K, A_k$

en $\mu_1 U_1, \mu_2 U_2, \ldots \mu_K U_K, A_k \mu_1^{\alpha_k^1} \mu_2^{\alpha_k^2} \ldots \mu_K^{\alpha_k^K}$.

Nous n'avons donc qu'un nombre fini de solutions essentiellement distinctes. Nous en aurions un nombre infini si les équations (1) n'étaient pas distinctes; mais cela ne se peut pas, puisqu'on ne peut assembler les polygônes

$$R_0, R_1, \ldots R_{\lambda-1}$$

que d'un nombre fini de manières.

Nous arrivons donc à la même conclusion que plus haut: *Il y a toujours des polygônes S_0 et il n'y en a jamais qu'un nombre fini.*

Le polygône V_0.

Nous venons de voir comment on pourrait construire le polygône fuchsien R_0; et comment il existait un polygône S_0 correspondant à chacun des nœuds tant dicritiques que monocritiques.

Soit G le groupe fuchsien engendré par R_0; soit g le groupe fuchsien engendré par S_0. Le groupe g sera un sous-groupe de G; c'est un sous-groupe « d'indice λ », puisque la surface (non-euclidienne) de S_0 est égale à λ fois celle de R_0.

A chacun des nœuds correspondra ainsi un sous-groupe g. Soit Γ le groupe formé des substitutions communes à tous les sous groupes g.

Je dis que Γ sera un groupe fuchsien, c'est-à-dire que Γ sera un sous groupe d'indice fini de G.

Nous avons posé plus haut

$$\frac{f}{\varphi} = -F(\zeta)$$

et nous avons vu que $F(\zeta)$ devait être une fonction

$$z = \frac{X_1}{X_2}$$

dans le cas d'un nœud dicritique et de

$$Z = \frac{(X_1)^\mu}{(X_2)^\nu}$$

dans le cas d'un nœud monocritique.

Soit alors k le nombre des nœuds et soit :

$$Z_1, Z_2, \ldots Z_k$$

les diverses fonctions Z relatives à ces divers nœuds.

Tous les Z_i seront fonctions fuchsiennes de ζ; et $F(\zeta)$ sera fonction rationnelle de chacun des Z_i.

A chaque valeur de $F(\zeta)$ correspondra par conséquent un nombre fini de valeurs de Z_1, un nombre fini de valeurs de $Z_2, \ldots,$ un nombre fini de valeurs de Z_k.

A chaque valeur de $F(\zeta)$ (ou, ce qui revient au même, à chaque point du polygône R_0) correspondra donc un nombre fini de systèmes de valeurs des Z_i. Soit Λ ce nombre fini. Soient alors $R_1, R_2, \ldots$ les différents polygônes fuchsiens congruents à R_0. Soit M_0 un point de R_0; soient $M_1, M_2, \ldots$ les points correspondants de $R_1, R_2, \ldots$.

A chacun des points M_i correspondra un système de valeurs des Z_i. Soient alors

$$M_0, M_1, \ldots, M_{\Lambda-1} \tag{5}$$

Λ points M_i correspondant à Λ systèmes différents de valeurs de Z. Alors si l'on considère un autre point M_i, ce point correspondra au même système de valeurs que l'un des points (5), puisque le nombre total des systèmes de valeurs est égal à Λ.

Nous dirons que deux points M_i sont équivalents s'ils correspondent à un même système de valeurs des Z, et que deux polygônes R_i sont équivalents si les points M_i correspondants sont équivalents.

Les substitutions du groupe Γ sont alors précisément celles qui changent les polygônes R_i en des polygônes équivalents.

On voit que Γ est un sous-groupe de G d'indice Λ.

Le polygône V_0 qui engendrera Γ, se composera de l'agrégation de Λ polygônes R_i et sa surface (non euclidienne) sera Λ fois celle de R_0.

Deux hypothèses sont possibles :

Ou bien le polygône V_0 est de genre zéro; alors il existe une fonction fuchsienne ξ, telle que tous les Z_i et $\dfrac{f}{\varphi}$ soient des fonctions rationnelles de ξ.

Ou bien le polygône V_0 sera de genre plus grand que zéro, et il y aura deux fonctions ξ et η, liées par une relation algébrique et telles que les Z_i et $\dfrac{f}{\varphi}$ soient fonctions rationnelles de ξ et de η.

Paris, 7 mai 1897.

H. POINCARÉ.

UN TEOREMA SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE
CON INFINITE TRASFORMAZIONI PROIETTIVE IN SÈ.

Nota di **Gino Fano**, in Roma.

Adunanza del 9 maggio 1897.

1. Nella mia Nota: *Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sè* (*) è dimostrato fra altri (benchè non vi sia esplicitamente enunciato) il teorema seguente: *Ogni superficie algebrica con un gruppo continuo primitivo di trasformazioni proiettive in sè si può riferire birazionalmente ad un piano in modo che a quel gruppo di trasformazioni proiettive su di essa corrispondano trasformazioni anche proiettive di questo piano* [e precisamente l'intero gruppo proiettivo ∞^8, oppure un gruppo ∞^6 o ∞^5 con una (sola) retta fissa].—Io mi propongo ora di precisare meglio questo risultato (**), determinando effettivamente *quali siano le superficie algebriche* Φ *di uno spazio qualunque, che ammettono un gruppo così fatto di trasformazioni proiettive.*

La questione equivale, come ognun vede, a quest'altra:

Quali sono i sistemi lineari Γ *di curve piane algebriche di un*

(*) Questi Rendiconti, vol. X, pag. 1 e seg.; cfr. in particolare n° 2.

(**) Il che non importava fare nella mia Nota citata; ma mi riescirà utile in seguito, per analoghe ricerche sulle varietà a tre dimensioni.

dato ordine qualunque n, che vengono trasformati in sè dall'intero gruppo proiettivo ∞^8 del piano, oppure da un gruppo proiettivo ∞^6 o *∞^5 con una sola retta fissa* (in particolare dal gruppo delle *affinità* o delle *affinità equivalenti*)? Le due questioni coincidono, perchè, da un lato, ogni superficie Φ si può rappresentare sul piano in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondano le curve di un sistema lineare Γ; e, d'altra parte, ogni sistema lineare così fatto può essere assunto come rappresentativo di una superficie Φ.—(Si osservi che un sistema lineare Γ è necessariamente *semplice*, vale a dire quelle curve di esso che passano per un punto generico del piano non contengono di conseguenza nessun altro punto variabile col primo: ciò perchè i tre gruppi proiettivi testè considerati non trasformano in sè nessuna involuzione piana, e nessun fascio di curve. Di qui si trae che ogni sistema Γ — escluso soltanto, nel caso di un gruppo ∞^6 o ∞^5, il sistema ∞^0 costituito dall'unica retta fissa, eventualmente anche contata più volte—o è una rete omaloidica, e precisamente quella delle rette, oppure ha la dimensione $\geqq 3$, e rappresenta perciò nel solito senso una certa superficie).

Evidentemente, il sistema lineare [di dimensione $\frac{1}{2}n(n+3)$] di *tutte* le curve piane algebriche di un dato ordine qualunque n è un sistema Γ; esso rappresenta una ben nota superficie di ordine n^2 dello spazio $S_{\frac{1}{2}n(n+3)}$, la quale sarà quindi una superficie Φ (*). Ma vi saranno altre superficie Φ? Noi dimostreremo di no, e avremo quindi il teorema:

Le sole superficie (algebriche) di uno spazio qualunque, le quali ammettono un gruppo continuo primitivo di trasformazioni proiettive in sè (ossia un gruppo il quale non lasci fisso su di esse alcun sistema ∞^1 di curve), *sono le superficie di ordine n^2 appartenenti a uno spazio $S_{\frac{1}{2}n(n+3)}$, che si possono rappresentare sul piano in modo che*

(*) Per $n=2$ si avrebbe la così detta *superficie di Veronese* (F_2^4 di S_5) (cfr. Veronese: *La superficie omaloide normale del quarto ordine...*; Mem. Acc. dei Lincei, ser. 3ª, vol. XIX, 1883-84; Segre: *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano...*; Atti Acc. di Torino, vol. XX, 1885). Per $n=3$, cfr. Del Pezzo: *Sulle superficie dell'n° ordine...* (questi Rend., vol. I).

alle loro sezioni iperpiane corrispondano le $\infty^{\frac{1}{2}n(n+3)}$ *curve algebriche di ordine n* (*).

Ovvero anche: *Un gruppo continuo primitivo* (∞^8, ∞^6 o ∞^5) *di omografie piane non trasforma in sè nessun sistema lineare di curve algebriche di un dato ordine n, all'infuori del sistema di dimensione* $\frac{1}{2}n(n+3)$ *di tutte le curve piane aventi quest'ordine* (e, nel caso di un gruppo ∞^6 o ∞^5, dei sistemi formati da tutte le curve di un ordine $k < n$, alle quali si sia aggiunta, come componente fissa, la retta invariante contata $n - k$ volte).

Un terzo enunciato, equivalente a questi due, sarebbe il seguente:

Se ad una curva piana di un dato ordine n si applicano tutte le (∞^8, ∞^6 o ∞^5) *trasformazioni di un gruppo primitivo di omografie piane, si ha un'infinità di curve di quello stesso ordine, la quale appartiene al sistema lineare di dimensione* $\frac{1}{2}n(n+3)$ *di tutte le curve piane di ordine n* (non è contenuta, cioè, in nessun sistema lineare di tali curve di dimensione inferiore)—purchè soltanto, nel caso di un gruppo ∞^6 o ∞^5, la retta invariante non sia parte della curva considerata.

2. Questo teorema sulle curve piane e sui sistemi lineari di tali curve è analogo ad altro, già noto (**), sui gruppi di elementi di una forma fondamentale di prima specie: *Se ad un gruppo qualunque di n elementi di una forma semplice si applicano le* ∞^3 *trasformazioni del gruppo proiettivo sulla forma stessa, ovvero anche quelle di un sottogruppo* ∞^2 *o di un sottogruppo* ∞^1 *parabolico del gruppo medesimo* (purchè l'elemento unito fisso di questo sottogruppo non sia uno degli *n* prima considerati), *si ha un'infinità di gruppi di n elementi, la quale appartiene all'involuzione completa* I_n^n *sulla forma stessa.*

(*) Per il caso del gruppo ∞^8 questo stesso teorema fu già enunciato (ma non dimostrato) dal sig. Lie. (« *Theorie der Transformationsgruppen* », vol. III, pag. 786), il quale lo riportò da un manoscritto inedito del sig. Study (cfr. l. c.).

(**) E che si potrebbe anche dimostrare facilmente, al pari di questo, per induzione completa.

Ovvero anche: *Le sole involuzioni* Γ_n^r *sopra una forma di prima specie* (ossia *sopra un ente razionale qualunque*), *le quali vengano trasformate in sè dall'intero gruppo proiettivo* ∞^3, *o anche da un gruppo* ∞^2 *o* ∞^1 *parabolico sulla forma stessa* (*sull'ente razionale*), *sono l'involuzione completa di dimensione* $r = n$, *e* (nel caso di un gruppo ∞^2 o ∞^1) *le involuzioni anche complete* Γ_r^r, *alle quali si sia aggiunto come elemento fisso l'unico elemento unito contato* $n - r$ *volte.*

E infine (enunciato analogo al primo del n° 1): *Le sole curve algebriche* (*) *appartenenti ad uno spazio qualunque* S_n, *le quali ammettono* ∞^3 *o* ∞^2 *trasformazioni proiettive, o anche soltanto un gruppo* ∞^1 *parabolico di tali trasformazioni, sono le curve razionali normali di ordine* n *di questo stesso spazio.*

Sotto quest'ultima forma il teorema è stato dato dal sig. Lie (**) per il caso di un gruppo proiettivo almeno ∞^2; nel caso del gruppo parabolico ∞^1 esso è noto per $n = 2$ e $n = 3$ (***), e si dimostrerebbe analogamente per n qualunque.

Di questi teoremi noi ci varremo ora per dimostrare quelli enunciati al n° 1; e possiamo proporci in particolare di dimostrare ad es. il secondo dei tre enunciati. Basterà limitarci al caso del gruppo proiettivo ∞^5, perchè questo entra come sottogruppo in tutti gli altri; sicchè il teorema, dimostrato vero in questo caso, lo sarà *a fortiori* per i gruppi ∞^6 e ∞^8.

Si abbia dunque in un piano un sistema lineare ∞^k (Γ) di curve algebriche di ordine n, il quale venga trasformato in sè dal gruppo proiettivo *speciale* ∞^5 (G) con una retta invariante r; retta che supponiamo non essere componente fissa di tutte le curve del sistema. Tali curve segheranno sopra r un'involuzione di ordine n, che dovrà essere trasformata in sè da tutte le ∞^3 proiettività subordi-

(*) L'algebricità della curva non è nemmeno ipotesi necessaria perchè il teorema sussista (o, per dir meglio, le curve soddisfacenti al teorema sono già necessariamente algebriche). Per gruppo ∞^1 parabolico deve allora intendersi quello che, nello spazio S_n, ha un solo punto unito fisso $(n+1)^{\text{plo}}$.

(**) Op cit., vol. III, pag. 187; per $n = 3$ e $n = 2$ cfr. anche Klein-Lie: Compt. Rend., vol. LXX, 1870; Math. Ann., vol. IV.

(***) Klein-Lie, l. c. Vedi anche Pittarelli: Annali di Mat., ser. 2ª, t. XXII.

nate da G sopra r stessa. Quest'involuzione sarà perciò di dimensione n; e per un gruppo qualunque di essa passeranno ancora infinite curve del sistema Γ. Ciò si vede subito, applicando a una curva qualunque del sistema le diverse omologie di asse r contenute in G (e queste sono precisamente le ∞^2 omologie *speciali* di asse r).—Nel sistema lineare Γ (che avrà una dimensione $\geqq n+1$) vi saranno dunque certo delle curve riducibili composte della retta r e di una parte residua di ordine $n-1$: tali curve residue formeranno (per $n>1$) un sistema lineare Γ' di dimensione $k-n-1$ (perchè l'involuzione segata da Γ sopra r è di dimensione n), il quale verrà pure trasformato in sè dal gruppo G.—Dico ora che la curva generica di questo sistema residuo non potrà contenere ancora r come parte fissa; vale a dire, in altri termini, che non è possibile che tutte le curve del sistema Γ (primo considerato), le quali contengono come parte la retta r, la contengano necessariamente come linea almeno doppia. Trasformiamo infatti una curva generica γ di Γ mediante un'omologia speciale di asse r, e sia γ' la curva così ottenuta (la quale incontrerà r negli stessi punti di γ); nel fascio determinato da γ e γ' (e che è tutto contenuto in Γ) vi sarà allora *una* curva contenente r come parte. Perchè r fosse componente almeno doppia di questa curva, bisognerebbe che γ e γ' avessero, nelle comuni loro intersezioni con quella retta, le stesse tangenti; e ciò si può sempre evitare, prendendo il centro dell'omologia considerata (sopra r, ma) fuori di queste intersezioni.—Il sistema Γ' non contiene dunque la r come parte fissa di ogni sua curva; e abbiamo perciò questo primo risultato:

Se il gruppo G considerato trasforma in sè stesso un sistema lineare ∞^k di curve algebriche di ordine $n>1$ non contenenti la retta invariante r come parte fissa, esso deve anche trasformare in sè un sistema lineare di curve di ordine $n-1$ non contenenti del pari la r come parte fissa, e avente la dimensione $k-n-1$ (la quale sarà $\geqq 2$).

Questo secondo sistema è il residuo della retta r rispetto al primo.

Ciò premesso, il teorema del n° 1 si dimostra facilmente per induzione completa. Esso è vero infatti per $n=1$; basterà perciò dimostrare che, ammesso che sussista per tutti gli ordini inferiori

ad un dato valore qualunque n, esso dovrà risultare verificato anche per questo stesso ordine n. — Siamo dunque autorizzati a supporre che il sistema Γ' (di curve di ordine $n - 1$, non contenenti la r come parte fissa) abbia la dimensione massima $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$; vale a dire che sia:

$$k - n - 1 = \frac{1}{2}(n-1)(n+2);$$

e allora sarà pure:

$$k = \frac{1}{2}n(n+3)$$

come appunto si voleva dimostrare.

3. Il teorema testè dimostrato per i sistemi lineari di curve piane si può anche estendere facilmente a uno spazio qualunque S_r, avvertendo però che i gruppi proiettivi analoghi a quelli da noi considerati nel piano non saranno più i soli gruppi proiettivi *primitivi*. Già per $r = 3$ sono anche primitivi il gruppo proiettivo ∞^{10} di un complesso lineare non speciale, il gruppo ∞^7 delle similitudini, e quello ∞^6 dei movimenti Euclidei o anche non Euclidei (*); tutti gruppi i cui analoghi nel piano sono imprimitivi.

(*) Lie: op. cit., vol. III, pp. 139, 140, 227.

Ripetendo lo stesso nostro ragionamento, e valendoci dei sistemi lineari di varietà M^n_{r-2} di S_{r-1} come noi ci siamo valsi delle involuzioni I_n in una forma di prima specie ($r = 2$), si potrebbero dimostrare, anche per induzione completa (rispetto ad r), i teoremi seguenti:

Se ad una varietà M^n_{r-1} di uno spazio S_r si applicano tutte le [$\infty^{r(r+2)}$] *trasformazioni del gruppo proiettivo di S_r medesimo, o anche soltanto quelle* [$\infty^{r(r+1)}$] *proiettività che lasciano fisso un iperpiano arbitrario, oppure quelle del gruppo speciale $\infty^{r(r+1)-1}$ contenuto invariantivamente nel precedente* (purchè in questi ultimi due casi l'iperpiano fisso non sia parte della varietà M^n_{r-1} considerata), *si ha un sistema di infinite varietà M^n_{r-1}, il quale appartiene al sistema lineare di dimensione $\binom{n+r}{r} - 1$ di tutte le varietà M^n_{r-1} di S_r.*

E quindi anche: *I tre gruppi proiettivi di S_r dianzi menzionati non trasformano in sè nessun sistema lineare di varietà M_{r-1} di un ordine qualunque n, all'infuori del sistema lineare di dimensione $\binom{n+r}{r} - 1$ di tutte le varietà aventi quest'ordine* (e, nel caso di un gruppo con un iperpiano fisso, dei sistemi formati da tutte le varietà di un ordine $k < n$, alle quali si sia aggiunto quello stesso iperpiano contato $n - k$ volte).

E infine: *Le sole varietà algebriche M_r di uno spazio qualunque, le quali ammettono un gruppo continuo di trasformazioni proiettive in sè, tale che, fissato un loro punto generico, risulti subordinato nella stella ∞^{r-1} delle direzioni uscenti da questo punto l'intero gruppo proiettivo ∞^{r^2-1}, sono le varietà razionali di ordine n^r appartenenti a spazi $S_{\binom{n+r}{r}-1}$, che si possono rappresentare sopra S_r in modo che alle loro sezioni iperpiane corrisponda il sistema lineare di tutte le varietà M_{r-1} di ordine n.*

Quest'ultimo teorema dice anche di più dei due precedenti; esso si basa ancora sopra un teorema del sig. Lie (*), in forza del quale ogni gruppo puntuale di S_r che nell'intorno di un punto generico, imposto come fisso, subordina l'intero gruppo proiettivo ∞^{r^2-1}, è simile a uno dei tre gruppi proiettivi di S_r stesso dianzi considerati; e sulla possibilità di trasformare il primo gruppo nel secondo, ove si tratti di un gruppo birazionale, con una trasformazione anche birazionale. Che ciò sia possibile, fu da me dimostrato finora nel solo caso di $r = 2$ (**); ma anche questa dimostrazione si estende facilmente al caso di r qualunque.

Roma, aprile 1897.

GINO FANO.

(*) Op. cit., vol. I, pag. 631.

(**) Cfr. la mia Nota cit. di questi Rendiconti, vol. X.

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES RELATIVES AU CALCUL DES INTÉGRALES DÉFINIES;

par M. **Michel Petrovitch**, à Belgrade (Serbie).

Adunanza del 23 maggio 1897.

1. Soient $F_1(u)$, $\Phi_1(u)$, $F_2(u)$, $\Phi_2(u)$ fonctions de u, développables en séries de Taylor

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
F_1(u) &= \sum_1^\infty A_m u^m \\
\Phi_1(u) &= \sum_1^\infty a_m u^m \\
F_2(u) &= \sum_1^\infty B_m u^m \\
\Phi_2(u) &= \sum_1^\infty b_m u^m
\end{aligned}
$$

convergentes pour $0 \leqq |u| \leqq 1$. Désignons par

(2)
$\lambda_1(\alpha, \beta)$ le coefficient de i dans $F_1(\alpha + \beta i)$
$\mu_1(\alpha, \beta)$ le coefficient de i dans $\Phi_1(\alpha + \beta i)$
$\lambda_2(\alpha, \beta)$ la partie réelle de $F_2(\alpha + \beta i)$
$\mu_2(\alpha, \beta)$ la partie réelle de $\Phi_2(\alpha + \beta i)$

et nous aurons

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
&\frac{1}{2i}[F_1(e^{zi}) - F_1(e^{-zi})] = \lambda_1(\cos z,\ \sin z)\\
&\frac{1}{2}[F_2(e^{zi}) + F_2(e^{-zi})] = \lambda_2(\cos z,\ \sin z)\\
&\frac{1}{2i}[\Phi_1(e^{(z-x)i}) - \Phi_1(e^{-(z-x)i})] = \mu_1[\cos(z-x),\ \sin(z-x)]\\
&\frac{1}{2}[\Phi_2(e^{(z-x)i}) + \Phi_2(e^{-(z-x)i})] = \mu_2[\cos(z-x),\ \sin(z-x)].
\end{aligned}
$$

Si l'on pose alors

$$
(4)\qquad f(z) = \lambda_1(\cos z,\ \sin z) + \lambda_2(\cos z,\ \sin z)
$$

$$
(5)\qquad \varphi(z) = \mu_1(\cos z,\ \sin z) + \mu_2(\cos z,\ \sin z)
$$

et si l'on y remplace λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 par leurs valeurs (3), on trouve

$$
(6)\qquad f(z) = \sum_1^{\infty}(A_m \sin mz + B_m \cos mz)
$$

$$
(7)\qquad \varphi(z) = \sum_1^{\infty}(a_m \sin mz + b_m \cos mz).
$$

Envisageons l'intégrale définie

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
J = \int_0^{2\pi} &[\lambda_1(\cos z,\ \sin z) + \lambda_2(\cos z,\ \sin z)]\big\{\mu_1[\cos(z-x),\ \sin(z-x)]\\
&+ \mu_2[\cos(z-x),\ \sin(z-x)]\big\}\,dz
\end{aligned}
$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$
J = \int_0^{2\pi} f(z)\,\varphi(z-x)\,dz.
$$

En développant $\varphi(z-x)$ en série trigonométrique d'après la formule (7), on aura

$$J = \sum_1^\infty a_m \int_0^{2\pi} f(z) \sin m(z-x)\, dz + \sum_1^\infty b_m \int_0^{2\pi} \cos m(z-x)$$

ou encore

$$(9) \qquad \begin{aligned} J = & \sum_1^\infty a_m \cos mx \int_0^{2\pi} f(z) \sin mz . dz \\ & - \sum_1^\infty a_m \sin mx \int_0^{2\pi} f(z) \cos mz . dz \\ & + \sum_1^\infty b_m \cos mx \int_0^{2\pi} f(z) \cos mz . dz \\ & + \sum_1^\infty b_m \sin mx \int_0^{2\pi} f(z) \sin mz . dz . \end{aligned}$$

Mais en vertu de la formule (6) on a

$$(10) \qquad \int_0^{2\pi} f(z) \sin mz . dz = \pi A_m$$

$$(11) \qquad \int_0^{2\pi} f(z) \cos mz . dz = \pi B_m$$

et par conséquent

$$(12) \qquad J = \sum_1^\infty (P_m \sin mx + Q_m \cos mx)$$

où

$$(13) \qquad \begin{aligned} P_m &= (b_m A_m - a_m B_m)\pi \\ Q_m &= (a_m A_m + b_m B_m)\pi . \end{aligned}$$

On a ainsi l'intégrale définie (8) développée en série de Fourier. Pour $x = 0$ on a

$$(14) \qquad J = \pi \sum_1^\infty (a_m A_m + b_m B_m).$$

Si $b_m = 0$, $B_m = 0$, on a

$$J = \pi \sum_1^\infty a_m A_m. \tag{15}$$

La formule (8) devient alors

$$\int_0^{2\pi} \lambda_1(\cos\zeta, \sin\zeta)\mu_2(\cos\zeta, \sin\zeta)\,d\zeta = \pi \sum_1^\infty a_m A_m. \tag{16}$$

Ces formules générales permettent de calculer un grand nombre d'intégrales définies soit en terme fini, soit en les développant en série.

2. On peut tirer p. ex. de la formule (16) la conséquence suivante. Soient

$$F_i(u) = \sum_1^\infty \chi_i(m)\,u^m \qquad (i = 1, 2) \tag{17}$$

des fonctions développables en série de Taylor convergentes pour

$$0 \leqq |u| \leqq 1;$$

soit en général $\lambda_i(\alpha, \beta)$ le coefficient de i dans $F_i(\alpha + \beta i)$ et posons pour abréger

$$\lambda_i(\cos\zeta, \sin\zeta) = \Omega_i; \tag{18}$$

d'après la formule (16) on aura

$$\int_0^{2\pi} \Omega_1 \Omega_2\, d\zeta = \pi \sum_1^\infty \chi_1(m)\chi_2(m). \tag{19}$$

En particulier si

$$F_1(u) = F_2(u)$$

on aura

$$\int_0^{2\pi} (\Omega_1)^2\, d\zeta = \pi \sum_1^\infty [\chi_1(m)]^2. \tag{20}$$

En remplaçant dans (17) u par xu, où le module de x est plus petit que le rayon de convergence de la série (17), en désignant par $\lambda(\alpha, \beta)$ le coefficient de i dans $F(\alpha + \beta i)$, et en posant pour abréger

$$\Omega = \lambda(x \cos z, \ x \sin z),$$

on aura

$$\int_0^{2\pi} (\Omega)^2 dz = \pi \sum_1^{\infty} [\chi(m)]^2 x^{2m}. \tag{21}$$

Si p. ex. on a

$$\chi(m) = \frac{1}{m!},$$

on aura

$$F(u) = e^{xu} - 1,$$

$$\lambda(x \cos z, \ x \sin z) = e^{x\cos z} \sin(x \sin z)$$

et en le remplaçant dans (21) on trouve

$$\int_0^{2\pi} e^{2x\cos z} [\sin(x \sin z)]^2 dz = \pi \sum_1^{\infty} \frac{x^{2m}}{(m!)^2} \tag{22}$$

ou, en changeant x en $x^{\frac{1}{2}}$,

$$\int_0^{2\pi} e^{2x^{\frac{1}{2}}\cos z} [\sin(x^{\frac{1}{2}} \sin z)]^2 dz = \pi \sum_1^{\infty} \frac{x^m}{(m!)^2}. \tag{23}$$

3. Si dans la formule (16) on fait

$$A_m = \frac{x^m}{m!},$$

on aura

$$F(u) = e^{xu} - 1,$$

d'où

$$\lambda(\cos z, \sin z) = e^{x\cos z}\sin(x\sin z)$$

et la formule (16) deviendra

$$(24)\quad \int_0^{2\pi} e^{x\cos z}\sin(x\sin z).\mu(\cos z, \sin z)\,dz = \pi\sum_1^{\infty}\frac{a_m x^m}{m!},$$

où $\mu(\alpha, \beta)$ est la partie réelle de $\Phi(u)$.

De la formule (16) on peut déduire le résultat suivant:

Etant donnée une fonction $\Phi(z)$, s'annulant avec $z = 0$ et développable en série de Taylor *convergente pour $|z| < 1$, si l'on désigne par $\mu(\alpha, \beta)$ le coefficient de i dans $\Phi(\alpha + \beta i)$, l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi}\frac{x\sin z}{1 - 2x\cos z + x^2}\mu(\cos z, \sin z)\,dz$$

sera égale à $\pi\Phi(x)$ pour $|x| < 1$.

Car si l'on fait

$$A_m = x^m,$$

on aura

$$F(u) = \frac{xu}{1 - xu},$$

d'où

$$\lambda(\cos z, \sin z) = \frac{x\sin z}{1 - 2x\cos z + x^2}$$

et en le remplaçant dans (16), on aura

$$(25)\quad \int_0^{2\pi}\frac{x\sin z}{1 - 2x\cos z + x^2}\mu(\cos z, \sin z)\,dz = \pi\sum_1^{\infty} a_m x^m = \pi\Phi(x)$$

formule valable pour $|x| < 1$.

Ainsi, lorsque

$$a_m = \frac{(-1)^{m-1}x^m}{m},$$

on aura

$$\Phi(u) = \log(1 + xu)$$

$$\mu(\cos z, \sin z) = \operatorname{arctg} \frac{x \sin z}{1 + x \cos z}$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} \frac{x \sin z}{1 - 2x \cos z + x^2} \operatorname{arctg} \frac{x \sin z}{1 + x \cos z} dz = \pi \log(x + 1).$$

Si l'on avait

$$a_m = \frac{x^m}{m!}$$

on aurait

$$\Phi(u) = e^{xu} - 1$$

$$\mu(\cos z, \sin z) = e^{x\cos z} \sin(x \sin z)$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\, e^{x\cos z} \sin z . \sin(x \sin z)}{1 - 2x \cos z + x^2} dz = \pi(e^x - 1).$$

Pour en faire d'autres applications immédiates, posons dans (20)

$$\chi(m) = \frac{(-1)^{m-1} x^m}{m},$$

d'où

$$F(u) = \log(1 + xu)$$

$$\lambda(\cos z, \sin z) = \operatorname{arctg} \frac{x \sin z}{1 + x \cos z}$$

et l'on aura

$$\int_0^{2\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{x\sin z}{1+x\cos z}\right)^2 dz = \pi\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{2(m-1)}x^{2m}}{m^2};$$

l'intégrale, donc, s'exprime par la transcendante

$$\zeta(x) = \sum_1^{\infty}\frac{x^m}{m^2}.$$

Si dans (17) on fait

$$\chi(m) = \frac{(-1)^{m-1}x^m}{m},$$

on aurait

$$\Omega = \frac{x\sin z}{1-2x\cos z + x^2};$$

et en le remplaçant dans (20), on aura

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{x\sin z}{1-2x\cos z+x^2}\right)^2 dz = \frac{\pi x^2}{1-x^2},$$

formule valable pour $|x| < 1$.

Si l'on fait

$$A_m = \frac{(-1)^{m-1}x^m}{m},$$

on trouve

$$J = \int_0^{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{x\sin z}{1+x\cos z}.\mu(\cos z,\ \sin z) = \pi\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}a_m x^m}{m};$$

d'où, la somme $\sum_1^{\infty} a_m x^m$ étant égale à $\Phi(x)$, l'on tire

$$(26)\qquad J = -\pi x\int_0^{x}\frac{\Phi(-x)\,dx}{x},$$

formule générale, valable pour $|x| < 1$.

Ainsi, lorsque

$$a_m = x^m,$$

on aura

$$\Phi(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$\mu(\cos z, \sin z) = \frac{x \sin z}{1 - 2x\cos z + x^2};$$

donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{x \sin z}{1 - 2x\cos z + x^2} \operatorname{arctg} \frac{x \sin z}{1 + x\cos z} dz = -\pi x \log(x+1).$$

4. Supposons maintenant que les développements de F_1 et F_2 soient de la forme

$$(27)\qquad \begin{aligned} F_1(u) &= \sum_1^{\infty} A_{2m} u^{2m} \\ F_2(u) &= \sum_1^{\infty} B_{2m} u^{2m}; \end{aligned}$$

on aurait alors

$$(28)\qquad f(z) = \sum_1^{\infty} (A_{2m} \sin 2mz + B_{2m} \cos 2mz)$$

et pour l'intégrale J, définie par (8), on aurait l'expression

$$(29)\qquad J = \sum_1^{\infty} (P_{2m} \sin 2mx + Q_{2m} \cos 2mx)'$$

avec

$$(30)\qquad \begin{aligned} P_{2m} &= (b_{2m} A_{2m} - a_{2m} B_{2m})\pi \\ Q_{2m} &= (a_{2m} A_{2m} + b_{2m} B_{2m})\pi. \end{aligned}$$

Pour $x=0$, $b_{2m}=0$, $B_{2m}=0$, on aurait

$$J=\pi\sum_1^\infty a_{2m}A_{2m} \tag{31}$$

et des formules analogues à (16), (19), (20), (21), (25), (26).

On aurait aussi des formules analogues en supposant que

$$F_1(u)=\sum_1^\infty A_{2m-1}u^{2m-1}$$

$$F_2(u)=\sum_1^\infty B'_{2m-1}u^{2m-1}.$$

En faisant p. ex.

$$A_{2m}=\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!},$$

on aura

$$F(u)=\cos xu-1,$$

$$\lambda(\cos z,\ \sin z)=\frac{e^{-x\sin z}-e^{x\sin z}}{2}\sin(x\cos z)$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi}(e^{x\sin z}-e^{-x\sin z})\sin(x\cos z).\mu(\cos z,\ \sin z)dz=-2\pi\sum_1^\infty\frac{(-1)^m a_m x^{2m}}{(2m)!}. \tag{32}$$

En faisant

$$A_m=\frac{(-1)^{m-1}x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

on aura

$$F(u)=\sin xu,$$

$$\lambda(\cos z,\ \sin z)=\frac{e^{x\sin z}-e^{-x\sin z}}{2}\cos(x\cos z)$$

et par conséquent

$$(33)\quad \int_0^{2\pi} (e^{x\sin z} - e^{-x\sin z}) \cos(x\cos z) . \mu(\cos z, \sin z)\, dz = 2\pi \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} a_m x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

5. Je signalerai ici comment les formules précédentes permettent de développer en séries les intégrales de la forme

$$J = \int_0^{2\pi} f(z)\varphi(z - x)\, dz$$

et

$$J = \int_0^{2\pi} f(z)\varphi(z)\, dz,$$

lorsque $\varphi(z)$ est une fonction méromorphe doublement périodique, ayant une période égale à 2π, ou une fonction auxiliaire, $f(z)$ étant une fonction développable en série de Fourier

$$f(z) = \sum_1^{\infty} (A_m \sin mz + B_m \cos mz)$$

pour les valeurs de z comprises entre 0 et 2π.

En remplaçant successivement $\varphi(z)$ p. ex. par les fonctions auxiliaires

$$\theta_1(z) = 2 \sum_1^{\infty} (-1)^{m-1} e^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 \lambda} \cos mz$$

$$\theta_3(z) - 1 = 2 \sum_1^{\infty} e^{m^2\lambda} \cos mz$$

(où λ est une quantité imaginaire à partie réelle négative), on aura les formules

$$(34)\quad \int_0^{2\pi} f(z)\theta_1(z-x)\, dz = 2 \sum_1^{\infty} (-1)^{m-1} e^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 \lambda} (A_m \sin mx + B_m \cos mx)$$

$$(35)\quad \int_0^{2\pi} f(z)\theta_1(z)\, dz = 2 \sum_1^{\infty} (-1)^{m-1} e^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 \lambda} B_m$$

$$(36)\quad \int_0^{2\pi} f(z)[\theta_3(z-x)-1]\,dz = 2\sum_1^{\infty} e^{m^2\lambda}(A_m \sin mx + B_m \cos mx)$$

$$(37)\qquad \int_0^{2\pi} f(z)[\theta_3(z)-1]\,dz = 2\sum_1^{\infty} e^{m^2\lambda} B_m.$$

En remplaçant $\varphi(z)$ par la fonction

$$D\log\theta_1(z) - \frac{\pi}{2}\cot\frac{z}{2} = 2\sum_1^{\infty}\frac{e^{2m\lambda}}{1-e^{2m\lambda}}\sin mz,$$

on aura les formules

$$(38)\qquad \int_0^{2\pi} f(z)\left[D\log\theta_1(z-x) - \frac{\pi}{2}\cot\frac{z-x}{2}\right]dz$$
$$= 2\sum_1^{\infty}\frac{e^{2m\lambda}}{1-e^{2m\lambda}}(A_m\cos mx + B_m \sin mx),$$

$$(39)\quad \int_0^{2\pi} f(z)\left[D\log\theta_1(z) - \frac{\pi}{2}\cot\frac{z}{2}\right]dz = 2\sum_1^{\infty}\frac{e^{2m\lambda}A_m}{1-e^{2m\lambda}}.$$

Soit maintenant $F(z)$ une fonction méromorphe doublement periodique à période 2π, n'ayant que des pôles simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. On aura alors

$$F(z) = H + \sum_1^{\infty} K_k D\log\theta_1(z-\alpha_k)$$

où H et les K_k sont des constantes. Envisageons l'intégrale

$$J = \int_0^{2\pi} f(z)\left[F(z) - \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{k=n} K_k\cot\frac{z-\alpha_k}{2}\right].$$

On aura

$$J = \sum_{k=1}^{k=n}\int_0^{2\pi} f(z)\,D\log\theta_1(z-\alpha_k) + H\int_0^{2\pi} f(z)\,dz.$$

Mais comme l'on a

$$\int_0^{2\pi} f(z)\,dz = 0$$

(puisque le développement trigonométrique de $f(z)$ ne contient pas le terme absolu), on aura, d'après la formule (38),

$$J = 2\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{e^{2m\lambda}}{1-e^{2m\lambda}}(A_m \cos m\alpha_k - B_m \sin m\alpha_k)$$

et l'on aurait facilement des développements analogues dans les cas où $F(z)$ aurait des pôles multiples.

Je signale le principe des développements précédents, permettant d'obtenir un grand nombre d'intégrales définies en termes finis ou sous la forme des séries.

Belgrade, 6 avril 1897.

MICHEL PETROVITCH.

SULLE CLASSI BEN ORDINATE.

Nota di C. Burali-Forti, in Torino.

Adunanza del 14 novembre 1897.

Nella mia Nota *Una questione sui numeri transfiniti* (*), ho detto essere, secondo il sig. G. Cantor, u una classe *ben ordinata*, quando sodisfa alle due seguenti condizioni:

(a) Esiste in u un primo elemento.

(b) Ogni elemento di u che ha dei seguenti ha l'immediatamente seguente.

In un recente articolo (**), e come ho poi verificato anche nel volume 21 (a pag. 548) dei Math. Ann., il sig. Cantor per definire la classe ben ordinata aggiunge alle condizioni (a) e (b) la seguente:

(c) Essendo u_1 una classe contenuta in u e tale che esistano in u elementi superiori a qualche u_1, allora esiste un elemento a di u tale che elementi inferiori ad a e superiori a qualche u_1 non esistono.

Ho creduto utile indicare esplicitamente questa mia involontaria omissione, sebbene io non abbia fatto uso nè della classe bene ordinata definita dal signor Cantor, nè della classe ordinata che sodisfa alle condizioni (a), (b); ma solamente della classe che io ho chiamata *perfettamente ordinata* che oltre sodisfare alle condizioni (a), (b) è anche tale che:

(c') Qualunque sia l'elemento x di u si ha che: o x non ha l'immediatamente precedente; o esiste un precedente y di x, non avente l'immediatamente precedente, tale che gli u compresi fra x e y sono in numero finito.

Risulta facilmente che ogni classe ben ordinata è anche perfettamente ordinata, ma non viceversa. Il lettore può verificare quali prop. della mia Nota ora citata sono verificate anche per le classi ben ordinate.

Torino, ottobre 1897.

C. Burali-Forti.

(*) Questi Rendiconti, tomo XI, pp. 154-164.

(**) Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. (Zweiter Artikel).—Math. Ann. Bd. 49.

INDICE

ESTRATTI DAI VERBALI

MEMORIE E COMUNICAZIONI

INDICE GENERALE

Fine della Parte 1ª del Tomo XI (1897).

Tipografia Matematica
28, via Ruggiero Settimo, Palermo.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

TOMO XI. — ANNO 1897.

PARTE SECONDA: BIBLIOTECA MATEMATICA.

PALERMO,
SEDE DELLA SOCIETÀ
28, via Ruggiero Settimo, 28

1897

REPERTORIO BIBLIOGRAFICO
DELLE SCIENZE MATEMATICHE IN ITALIA.

(*Continuazione*, vedi t. X, pp. 15-50).

GIORNALE DI MATEMATICHE
ad uso degli studenti delle Università Italiane.
(1863-1889) (*).

VOLUMI: I (1863), II (1864), III (1865) pubblicati « per cura dei professori G. Battaglini, V. Janni e N. Trudi ».

VOLUMI: IV (1866), V (1867), VI (1868), VII (1869), VIII (1870), IX (1871) pubblicati « per cura del prof. G. Battaglini ».

VOLUMI: X (1872), XI (1873) pubblicati « per cura dei professori G. Battaglini, E. Fergola in unione dei professori E. D'Ovidio, G. Torelli, e C. Sardi ».

VOLUMI: XII (1874), XIII (1875), XIV (1876), XV (1877), XVI (1878), XVII (1879), XVIII (1880), XIX (1881), XX (1882), XXI (1883), XXII (1884), XXIII (1885), XXIV (1886), XXV (1887), XXVI (1888), XXVII (1889) pubblicati « per cura del prof. G. Battaglini ».

ABBREVIATURE.

G. B. = Giornale di Matematiche, v. = Volume, pp. = Pagine.

2718. **A 1 a.**

RUBINI (Raffaele). Sulla divisione di una funzione intera per un'altra. [*G. B.*, v. IV, pp. 38-44 (1866)].

2719. **A 1 a.**

JADANZA (Nicodemo). Sulle progressioni a due e a tre differenze. [*G. B.*, v. VI, pp. 375-379 (1868); v. VII, pp. 17-23 (1869)].

2720. **A 1 a, I 1.**

VECCHIO (Angelo). Sulle proporzioni e progressioni. [*G. B.*, v. VII, pp. 43-49 (1869)].

2721. **A 1 a.**

JADANZA (Nicodemo). Sulle progressioni. [*G. B.*, v. VII, pp. 117-130 (1869)].

(*) Il lavoro di spoglio e di classificazione di questa raccolta è dovuto al prof. G. Torelli pei volumi I-X ed al prof. F. Gerbaldi pei volumi XI-XXVII.

2722. **A 1 a, I 12 b.**

SARDI (Ciro). Sulle progressioni per differenza. [*G. B.*, v. XI, pp. 123-152 (1873)].

2723. **A 1 a, H 12 a.**

RETALI (Virginio). Sulle progressioni geometriche d'ordine superiore. [*G. B.*, v. XI, pp. 349-356 (1873)].

2724. **A 1 a.**

BONOLIS (Alfonso). Sulle progressioni di ordine superiore. [*G. B.*, v. XII, pp. 179-192, 231-249 (1874)].

2725. **A 1 a.**

LONGCHAMPS (Gohierre de). Des fractions étagées. [*G. B.*, v. XV, pp. 299-328 (1877)].

2726. **A 1 a.**

RONCHETTI (Ferdinando). Saggio di aritmetica dei titoli di credito. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 242-269 (1886)].

2727. **A 1 a.**

RONCHETTI (Ferdinando). Calcolo del valore, al netto, di titoli soggetti a tassa di circolazione e dritto di provvigione, come le obbligazioni ferroviarie. [*G. B.*, v. XVI, pp. 133-154 (1888)].

2728. **A 1 b.**

REALIS (Savino), BOURGUET (L.). Questione e soluzione. [*G. B.*, v. IX, pag. 210 (1871); v. XIV, pp. 151-152 (1876)].

2729. **A 1 b.**

VALERIANI (Valeriano). Nuova dimostrazione d'un'importante formola algebrica. [*G. B.*, v. XII, pp. 208-212 (1874)].

2730. **A 1 b.**

TIRELLI (Francesco). Alcune proprietà dei coefficienti binomiali. [*G. B.*, v. XIV, pp. 318-320 (1876)].

2731. **A 1 b.**

DAINELLI (Ugo). Teoremi sulla somma di tre quadrati interi. [*G. B.*, v. XV, pp. 378-380 (1877)].

2732. **A 1 b, B 5.**

CAPELLI (Alfredo). Alcune formule numeriche in relazione alla teoria delle operazioni di polare. [*G. B.*, v. XXI, pp. 343-354 (1883)].

2733. **A 1 b.**
VERDE (F.), BOSI (Luigi). Quistione 65 e soluzione. [*G. B.*, v. XXV, pag. 50, 379-380 (1887)].

A 1 b. (*Vedi* n° 2896).

2734. **A 1 c.**
TARDY (Placido). Sopra alcune formole relative ai coefficienti binomiali. [*G. B.*, v. III, 1-3 (1865)].

2735. **A 1 c, C 1 e.**
D'OVIDIO (Errico). Nuova dimostrazione di una formola di Abel. [*G. B.*, v. VI, 37-45 (1868)].

2736. **A 1 c, D 2 b.**
JANNI (Vincenzo). Sulla serie binomiale. [*G. B.*, v. XII, pp. 229-230, 312 (1874)].

2737. **A 1 c, J 1.**
GERBALDI (Francesco). Nota sopra alcune applicazioni di una formola combinatoria. [*G. B.*, v. XVIII, pp. 308-316 (1880)].

2738. **A 2 a.**
VALERIANI (Valeriano). Sistema generale di n equazioni lineari fra n incognite. [*G. B.*, v. IX, 371-376 (1871)].

2739. **A 2 a.**
BONOLIS (Alfonso). Risoluzione di $2n$ equazioni con $2n$ incognite che si presentano in alcune questioni di meccanica applicata alle costruzioni. [*G. B.*, v. XI, pp. 38-41 (1873)].

2740. **A 2 b, A 3 k, K 20.**
CERRUTI (Valentino). Soluzione dei problemi proposti negli esami di licenza per i Licei e gli Istituti tecnici del regno. [*G. B.*, v. XIII, pp. 337-343 (1875)].

2741. **A 3.**
REALIS (Savino). Sulla forma delle funzioni razionali della radice d'una equazione algebrica. [*G. B.*, v. IX, pp. 206-210 (1871)].

A 3. (*Vedi* n° 2867).

2742. **A 3 a α.**
POSCOLO (Giorgio). Sulla necessaria esistenza di una radice reale o immaginaria in ogni equazione algebrica. [*G. B.*, v. II, pp. 13-16 (1864)].

2743. **A 3 a α.**
VALERIANI (Valeriano). Ogni equazione del grado n [illegible] *B.*, v. XIII, pp. 33-46 (1875)].

2744. **A 3 b, J 1 a.**

TORELLI (Gabriele). Sulle funzioni simmetriche complete. [*G. B.*, v. V, pp. 110-120 (1867)].

2745. **A 3 b.**

BONOLIS (Alfonso). Alcune formole ricavate da quelle di Newton pel calcolo delle funzioni simmetriche semplici delle radici d'un'equazione. [*G. B.*, v. XI, pp. 321-330 (1873)].

2746. **A 3 b.**

CROCCHI (Leopoldo). Una relazione fra le funzioni simmetriche semplici e le funzioni simmetriche complete. [*G. B.*, v. XVIII, pp. 377-380 (1880)].

2747. **A 3 b.**

CROCCHI (Leopoldo). Sopra la corrispondenza tra i coefficienti di un'equazione algebrica e le funzioni simmetriche complete. [*G. B.*, v. XX, pp. 301-320 (1882)].

2748. **A 3 b, I 11 b.**

CESÀRO (Ernesto), TAVANI (Decio). Quistione 44 e soluzione. [*G. B.*, v. XXII, pag. 16 (1884); v. XXIII, pp. 233-234 (1885)].

2749. **A 3 b.**

JANNI (Vincenzo). Sviluppo di una funzione simmetrica mediante le somme delle potenze simili. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 34-36 (1885)].

2750. **A 3 b, J 1 a.**

STASSANO (Pietro). Sulle funzioni isobariche. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 57-93 (1886)].

2751. **A 3 c, B 3 a.**

TRUDI (Nicola). Sul processo del massimo comun divisore fra due funzioni intere di una variabile. [*G. B.*, v. II, pp. 21-26 (1864)].

2752. **A 3 d.**

TRUDI (Nicola). Una dimostrazione del teorema di Sturm. [*G. B.*, v. I, pp. 59-63 (1863)].

2753. **A 3 d.**

JANNI (Vincenzo). Nota sulla risoluzione delle equazioni numeriche. [*G. B.*, v. V, pp. 182-183 (1867)].

2754. **A 3 d.**

ZINNA (Alfonso). Sulla separazione delle radici delle equazioni numeriche. [*G. B.*, v. VI, pp. 344-356 (1868)].

2755. **A 3 d.**
REALIS (Savino). Sulle radici reali contenute fra dati limiti. [*G. B.*, v. IX, pp. 355-357 (1871)].

2756. **A 3 g.**
GENOCCI (Angelo). Intorno al metodo d'approssimazione di Newton. [*G. B.*, v. II, pp. 27-29 (1864)].

2757. **A 3 g.**
JANNI (Giuseppe). Metodo per calcolare con approssimazioni successive certe le radici reali dell'equazioni algebriche. [*G. B.*, v. VIII, pp. 157-160 (1870)].

2758. **A 3 i.**
REGIS (Domenico). Sul numero delle radici reali che può avere l'equazione $x^m - px + q = 0$. [*G. B.*, v. VIII, pp. 226-228 (1870)].

2759. **A 3 i.**
CROCCHI (Leopoldo), CAPORALI (Ettore). Questione 13 e soluzione. [*G. B.*, v. X, pag. 361 (1872); v. XI, pp. 116-120 (1873)].

2760. **A 3 i, D 6 c α.**
AMANZIO (Domenico). Risoluzione per serie delle equazioni quadrinomie della forma

$$A x^{2m+n} + B x^{m+n} + C x^n + D = 0.$$

[*G. B.*, v. XIV, pp. 153-179, 306-317 (1876)].

2761. **A 3 i.**
GATTI (Stefano). Sulle equazioni a radici equidifferenti. [*G. B.*, v. XV, pp. 28-33 (1877)].

2762. **A 3 i.**
VIAGGI (Francesco). Sulle equazioni a radici equidifferenti. [*G. B.*, v. XV, pp. 376-377 (1877)].

2763. **A 3 i α.**
RUBINI (Raffaele). Intorno alle equazioni binomie. [*G. B.*, v. V, pp. 184-189 (1867)].

2764. **A 3 i α, I 4, I 7 a.**
TRUDI (Nicola). Intorno alle equazioni binomie. [*G. B.*, v. X, pp. 241-278 (1872)].

2765. **A 3 i α, I 3.**
VIVANTI (Giulio). Un problema d'algebra. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 229-232 (1889)].

2766. **A 3 k.**

MATTHIESSEN (Louis). Résolution nouvelle de l'équation du quatrième degré. [*G. B.*, v. V, pp. 234-235 (1867)].

2767. **A 3 k.**

AMANZIO (Domenico). Risoluzione dell'equazione di 3° grado. [*G. B.*, v. XII, pp. 89-92 (1874)].

2768. **A 3 k.**

VALERIANI (Valeriano). Soluzione analitica delle equazioni biquadratiche complete. [*G. B.*, v. XIII, pp. 99-106 (1875)].

2769. **A 3 k.**

MOLLAME (Vincenzo). Una risoluzione dell'equazione completa di 3° grado, e le radici di questa in funzione del discriminante della cubica. [*G. B.*, v. XVI, pp. 341-344 (1878)].

2770. **A 3 k.**

JANNI (Vincenzo). Sopra una formola di A r o n h o l d. [*G. B.*, v. XXI, pp. 213-216 (1883)].

A 3 k. (*Vedi* n° 2740).

2771. **A 3 l.**

VECCHIO (Angelo). Sulle equazioni trascendenti. [*G. B.*, v. VII, pag. 42 (1869)].

2772. **A 3 l.**

VECCHIO (Angelo). Sulle equazioni trascendenti. [*G. B.*, v. X, pp. 171-174 (1872)].

2773. **A 3 l.**

FAVERO (Ioannes Baptista). De quæstione radicum realium cuiuslibet æquationis numericæ unius incognitæ. [*G. B.*, v. XIII, pp. 249-281 (1875)].

2774. **A 4.**

JANNI (Giuseppe). Esposizione della teorica della risoluzione dell'equazioni di G a l o i s. [*G. B.*, v. XII, pp. 277-299 (1874)].

2775. **A 4 d.**

FERGOLA (Emmanuele), ARMENANTE (Angelo). Quistione 51, e soluzione. [*G. B.*, v. IV, pag. 318 (1866); v. V, pp. 125-126 (1867)].

2776. **A 4 e.**

JUNG (Giuseppe), ARMENANTE (Angelo). Sopra una equazione dell'ottavo grado. [*G. B.*, v. VII, pp. 98-104 (1869)].

2777. **A 5 a.**
TRUDI (Nicola). Sulla decomposizione delle funzioni fratte razionali. [*G. B.*, v. II, pp. 225-242, 257-263 (1864)].

2778. **A 5 a, D 1 b.**
TRUDI (Nicola). Sullo sviluppo delle funzioni fratte razionali (*). [*G. B.*, v. V, pp. 1-20, 93-105, 257-272, 337-350 (1867)].

2779. **B 1.**
HESSE (Otto). I determinanti elementarmente esposti. Traduzione di Valeriano Valeriani. [*G. B.* v. X, pp. 217-229, 325-342 (1872)].

2780. **B 1 a.**
JANNI (Giuseppe). Sopra i determinanti minori di un dato determinante. [*G. B.*, v. I, pp. 270-275 (1863)].

2781. **B 1 a.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Nota sui determinanti. [*G. B.*, v. IX, pp. 136-144 (1871)].

2782. **B 1 a, B 1 c.**
CALDARERA (Francesco). Su talune proprietà dei determinanti, in ispecie di quelli a matrici composte colla serie dei numeri figurati. [*G. B.*, v. IX, pp. 223-232 (1871)].

2783. **B 1 a.**
ALBEGGIANI (Michele). Sviluppo di un determinante ad elementi binomii ed applicazione alle questioni 1ª, 2ª, 3ª, 4ª pag. 188. [*G. B.*, v. X, pp. 279-293 (1872)].

2784. **B 1 a.**
JANNI (Vincenzo). Dimostrazione di alcuni teoremi sui determinanti. [*G. B.*, v. XII, pp. 142-145 (1874)].

2785. **B 1 a.**
ALBEGGIANI (Michele). Sviluppo d'un determinante ad elementi polinomi. [*G. B.*, v. XIII, pp. 1-32 (1875)].

2786. **B 1 a, B 3 a.**
BONOLIS (Alfonso). Di un nuovo e semplice modo di sviluppare i determinanti di grado qualunque, e sua applicazione alla ricerca della risultante di due equazioni qualsivogliano. [*G. B.*, v. XXI, pp. 336-342 (1883)].

(*) Memoria estratta dal v. II degli Atti della R. Accad. di scienze fisiche e matem. di

2787. **B 1 a.**

BAGNERA (Giuseppe). Sopra i determinanti che si possono formare cog'i stessi n^2 elementi. [*G. B.*, v. XXV, pp. 228-231 (1887)].

B 1 a. (*Vedi* n° 3001).

2788. **B 1 b.**

SARDI (Ciro). Nuova dimostrazione del prodotto di due matrici. [*G. B.* v. V, pp. 174-177 (1867)].

2789. **B 1 b.**

JANNI (Vincenzo). Sul prodotto di due matrici. [*G. B.*, v. XI, pp. 357-358 (1873)].

2790. **B 1 b.**

RUBINI (Raffaele). Formole di trasformazioni nella teorica dei determinanti. [*G. B.*, v. XVI, pp. 198-208, 344 (1878)].

2791. **B 1 c.**

D'OVIDIO (Errico). Due teoremi di determinanti. [*G. B.*, v. I, pp. 135-139 (1863)].

2792. **B 1 c, J 1 c.**

TRUDI (Nicola). Intorno ad un determinante più generale di quello delle radici delle equazioni, ed alle funzioni omogenee complete di queste radici. [*G. B.*, v. II, pp. 152-158, 180-186 (1864)].

2793. **B 1 c.**

SARDI (Ciro), RAJOLA (Luigi), TORELLI (Gabriele). Quistione 39, e soluzione. [*G. B.*, v. II, pp. 256, 315-316 (1864)].

2794. **B 1 c.**

RUBINI (Raffaele). Su talune formole relative a determinanti. [*G. B.*, v. IV, pp. 187-192 (1866)].

2795. **B 1 c.**

SARDI (Ciro), TORELLI (Gabriele), RAJOLA (Luigi). Quistione 47, e soluzioni. [*G. B.*, v. IV, pp. 239-240, 294-297 (1866)].

2796. **B 1 c.**

TORELLI (Gabriele). Teorema sui determinanti a due scale e soluzione della questione 47. [*G. B.*, v. IV, pp. 294-297 (1866)].

2797. **B 1 c.**

SARDI (Ciro). Un teorema sui determinanti. [*G. B.*, v. VI, pp. 357-360 (1868)].

2798. **B 1 c.**
EUGENIO (Vito). Considerazioni intorno a taluni determinanti particolari. [*G. B.*, v. VIII, pp. 285-290 (1870)].

2799. **B 1 c.**
FIORE (Vincenzo). Dimostrazione d'una trasformazione di determinanti. [*G. B.*, v. X, pag. 170 (1872)].

2800. **B 1 c.**
SIACCI (Francesco), TIRELLI (Francesco). Questione 10 e soluzione. [*G. B.*, v. X, pag. 360 (1872); v. XII, pp. 75-78 (1874)].

2801. **B 1 c.**
ALBEGGIANI (Michele). Dimostrazione d'una formula d'analisi di F. Lucas. [*G. B.*, v. XIII, pp. 107-112 (1875)].

2802. **B 1 c.**
TIRELLI (Francesco), LANDRIANI (Antonio). Quistione 36, e soluzione. [*G. B.*, v. XIII, pp. 167, 225, 356-358 (1875)].

2803. **B 1 c.**
BONOLIS (Alfonso). Sviluppi di alcuni determinanti. [*G. B.*, v. XV, pp. 113-134 (1877)].

2804. **B 1 c, M^1 2 a α, M^1 4 a, M^1 5 a, M^3 4 a, M^3 5, M^3 6 a.**
GARBIERI (Giovanni). Nuovo teorema algebrico e sua speciale applicazione ad una maniera di studiare le curve razionali. [*G. B.*, v. XVI, pp. 1-17, 108-147 (1878)].

2805. **B 1 c.**
MINOZZI (Achille). Sopra un determinante. [*G. B.*, v. XVI, pp. 148-151 (1878)].

2806. **B 1 c.**
CROCCHI (Leopoldo). Sopra le funzioni *aleph* ed il determinante di Cauchy. [*G. B.*, v. XVII, pp. 218-231, 380 (1879)].

2807. **B 1 c.**
DEL RE (Alfonso). Relazione tra due determinanti. [*G. B.*, v. XIX, pp. 116-117 (1881)].

2808. **B 1 c.**
PINCHERLE (Salvatore). Sopra una formola di analisi. [*G. B.*, v. XIX, pp. 385-386 (1881)].

2809. **B 1 c.**
CROCCHI (Leopoldo), C. E. Questione 52 e osservazione. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 33, 232 (1885)].

2810. **B 1 c.**

CESÀRO (Ernesto), TAVANI (Decio). Questione 46, e soluzione. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 19, 374-376 (1885)].

2811. **B 1 c.**

MARCOLONGO (Roberto). Generalizzazione d'un teorema sui determinanti. [*G. B.*, v. XXV, pp. 298-302 (1887)].

2812. **B 1 c, H 12 a.**

RAIMONDI (R.). Un teorema sui determinanti di differenze. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 185-188 (1888)].

2813. **B 1 c.**

LORIA (Gino). Nota su una classe di determinanti. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 329-333 (1888)].

B 1 c. (*Vedi* nⁱ 2782, 2875, 3086, 3181).

2814. **B 1 c β.**

JANNI (Giuseppe). Teorica di determinanti simmetrici gobbi. [*G. B.*, v. I, pp. 275-278 (1863)].

2815. **B 1 c β.**

CREMONA (Luigi), D'OVIDIO (Errico), TORELLI (Gabriele), MOGNI (Antonio). Quistione 32, e soluzioni. [*G. B.*, v. II, pag. 62 (1864); v. III, pp. 5-14 (1865)].

2816. **B 1 d.**

ARMENANTE (Angelo). Sui determinanti cubici. [*G. B.*, v. VI, pp. 175-181 (1868)].

2817. **B 1 d.**

PADOVA (Ernesto). Sui determinanti cubici. [*G. B.*, v. VI, pp. 182-189 (1868)].

2818. **B 1 d.**

GARBIERI (Giovanni). Determinanti formati con elementi di un numero qualunque d'indici. [*G. B.*, v. XV, pp. 89-100 (1877)].

2819. **B 2, B 10 b.**

SIACCI (Francesco), CASSANI (Pietro), ALBEGGIANI (Michele), ANONIMO. Quistioni 1, 2, 3, 4, 5, e soluzioni. [*G. B.*, v. X, pp. 188, 239-240, 279-293, 307-312 (1872)].

B 2. (*Vedi* n° 3034).

2820. **B 3 a.**

ISÈ (Ernesto). Nota sulla risultante di due equazioni. [*G. B.*, v. VIII, pp. 1-27 (1870)].

2821. **B 3 a.**
ISÈ (Ernesto). Sul grado della risultante. [*G. B.*, v. XI, pag. 253 (1873)].

2822. **B 3 a.**
JANNI (Vincenzo). Sul grado dell'eliminante del sistema di due equazioni. [*G. B.*, v. XII, pag. 27 (1874)].

2823. **B 3 a, B 7 f**
PITTARELLI (Giulio). Intorno ad un problema di eliminazione nella teoria analitica della cubica gobba. [*G. B.*, v. XVII, pp. 244-259 (1879)].

2824. **B 3 a, B 7 f**
PASCAL (Ernesto). Sulla risultante di un'ennica e di una cubica (estensione di un metodo di Clebsch). [*G. B.*, v. XXV, pp. 257-280 (1887)].

B 3 a. (*Vedi* ni 2751, 2786, 2960).

2825. **B 3 b, D 6 c δ, D 6 c α.**
CESÀRO (Ernesto). Intorno a talune funzioni isobariche-omogenee. [*G. B.*, v. XXII, pp. 33-45, 166 (1884)].

2826. **B 3 d.**
ARZELÀ (Cesare). Sopra la teoria dell'eliminazione algebrica. [*G. B.*, v. XV, pp. 62-85, 154-177 (1877)].

2827. **B 3 d.**
JANNI (Vincenzo). Sul teorema di Sturm [*G. B.*, v. XX, pp. 166-167 (1882)].

2828. **B 3 j.**
PRATTINI (Giovanni). Risoluzione di un sistema di sei equazioni fra nove quantità. [*G. B.*, v. XVIII, pp. 174-177 (1880)].

2829. **B 4.**
JANNI (Giuseppe). Teorica dei contravarianti, degli invarianti, e dei covarianti. [*G. B.*, v. I, pp. 174-182, 194-202, 240-253, 340-351 (1863); v. II, pp. 135-142, 161-170, 211-223 (1864)].

2830. **B 4.**
NOVI (Giovanni). Sugl'invarianti e i covarianti delle forme binarie. [*G. B.*, v. II, pp. 306-314, 321-330 (1864)].

B 4. (*Vedi* n° 3174).

2831. **B 4 c.**
D'OVIDIO (Enrico). Sopra un teorema fondamentale della teoria degli invarianti. [*G. B.*, v. XV, pp. 187-192 (1877)].

2832. **B 4 d, B 4 e, B 4 f.**

PITTARELLI (Giulio). Esercizii sul calcolo delle forme binarie. [*G. B.*, v. XV, pp. 362-375 (1877)].

2833. **B 4 e.**

CAPELLI (Alfredo). Sopra un punto della teoria delle forme binarie. [*G. B.*, v. XVI, pp. 217-224 (1878)].

2834. **B 4 e.**

PITTARELLI (Giulio). Nota sugli scorrimenti (*Ueberschiebungen*) delle forme binarie. [*G. B.*, v. XVI, pp. 225-233 (1878)].

2835. **B 4 e, B 4 f.**

PITTARELLI (Giulio). Sul significato geometrico delle *Ueberschiebungen* nelle forme binarie. [*G. B.*, v. XVII, pp. 160-171 (1879)].

2836. **B 4 e.**

PASCAL (Ernesto). Su di un teorema sul calcolo simbolico nella teoria delle forme binarie.—Aggiunte. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 33-38; 102-107 (1888)].

2837. **B 4 e, B 7 a, B 7 b.**

MOLLO (Cesare). Sulle forme binarie. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 327-333 (1889)].

2838. **B 4 f, B 10, K 7 e, B 7 a, B 7 b, B 7 f, M[1] 2 a α.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle forme binarie dei primi quattro gradi. [*G. B.*, v. II, pp. 170-179, 193-202, 243-253, 340-351 (1864); v. III, pp. 24-31, 51-59, 218-227 (1865)].

2839. **B 4 f, M[1] 2 a α.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle forme binarie di grado qualunque. [*G. B.*, v. IX, pp. 1-18, 76-86 (1871)].

2840. **B 4 f.**

CASSANI (Pietro). Studio intorno alle forme binarie. [*G. B.*, v. X, pp. 230-234 (1872)].

2841. **B 4 f, B 7 c.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Nota sulla quintica binaria. [*G. B.*, v. XIV, pp. 54-65 (1876)].

B 4 f. (*Vedi* ni 2832, 2835, 2848, 2850, 3070).

2842. **B 4 h.**

CAPELLI (Alfredo). Sopra la corrispondenza (2,2) ossia la forma $f(\overset{2}{x}, \overset{2}{y})$ ed i suoi invarianti e covarianti relativi a due trasformazioni lineari indipendenti delle variabili. [*G. B.*, v. XVII, pp. 69-148 (1879)].

2843. **B 4 h, B 8.**

CAPELLI (Alfredo). Sopra le forme algebriche ternarie a più serie di variabili. [*G. B.*, v. XVIII, pp. 17-33 (1880)].

2844. **B 4 h.**

PEANO (Giuseppe). Formazioni invariantive delle corrispondenze. [*G. B.*, v. XX, pp. 79-100 (1882)].

B 4 h. (*Vedi* n° 2995).

B 6. (*Vedi* n° 2732).

B 7 a. (*Vedi* ni 2837, 2838, 3113, 3114).

2845. **B 7 b.**

BRIOSCHI (Francesco). Sulle proprietà di una forma biquadratica. [*G. B.*, v. XXII, pp. 130-132 (1884)].

B 7 b. (*Vedi* ni 2837, 2838).

B 7 c. (*Vedi* n° 2841).

2846. **B 7 f.**

BERTINI (Eugenio). Sistema simultaneo di due forme biquadratiche binarie. [*G. B.*, v. XIV, pp. 1-13 (1876)].

2847. **B 7 f.**

GERBALDI (Francesco). Sul sistema simultaneo di due forme cubiche binarie. [*G. B.*, v. XVII, pp. 373-380 (1879)].

2848. **B 7 f, B 4 f.**

TORELLI (Gabriele). Teoremi sulle forme binarie cubiche, e loro applicazione geometrica. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 270-279 (1886)].

B 7 f. (*Vedi* ni 2823, 2824, 2838, 3113, 3194, 3238, 3239).

2849. **B 8.**

BRIOSCHI (Francesco). Sopra una proprietà delle forme ternarie. [*G. B.*, t. I, pp. 65-67 (1863)].

2850. **B 8, B 4 f.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle forme ternarie di grado qualunque. [*G. B.*, v. IX, pp. 152-169, 193-205 (1871)].

2851. **B 8.**

BERNARDI (Giuseppe). Sopra le proprietà generali degl'invarianti e dei cova-

rianti di una e di più forme ternarie. [*G. B.*, v. XIX, pp. 136-150, 258-297 (1881)].

B 8. (*Vedi* n° 2843).

B 8 a. (*Vedi* n° 2854).

2852. **B 8 b.**
JANNI (Vincenzo). Decomposizione di un'equazione di 4° grado fra due variabili in due fattori razionali di 2°. [*G. B.*, v. VII, pag. 28 (1869)].

2853. **B 8 b, M' 6 l.**
MAISANO (Giovanni). Sistemi completi dei primi cinque gradi della forma ternaria biquadratica e degli invarianti, covarianti e controvarianti di sesto grado. [*G. B.*, v. XIX, pp. 198-236 (1881)].

2854. **B 8 d, B 8 a.**
GERBALDI (Francesco). Sulla forma Jacobiana di tre forme ternarie. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 33-39 (1889)].

2855. **B 9 d.**
CAPELLI (Alfredo). Sul numero dei covarianti di dato grado per forme di qualsivoglia specie. [*G. B.*, v. XX, pp. 287-300 (1882)].

B 10. (*Vedi* n° 2838).

2856. **B 10 a.**
BRIOSCHI (Francesco). Intorno ad una trasformazione delle forme quadratiche. [*G. B.*, t. I, pp. 26-27 (1863)].

2857. **B 10 a.**
SARDI (Ciro). Nota sulla riduzione alla forma canonica delle quadratiche. [*G. B.*, v. V, pp. 35-38 (1867)].

2858. **B 10 b.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle forme binarie di secondo grado. [*G. B.*, v. III, pp. 22-23 (1865)].

B 10 b. (*Vedi* n° 2819).

2859. **B 10 b α, H 2 c β.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Intorno ad un'applicazione della teoria delle forme binarie quadratiche all'integrazione dell'equazione differenziale ellittica. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 128-140 (1886)].

B 10 b α. (*Vedi* n° 3113).

2860. **B 10 d.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle forme ternarie quadratiche. [*G. B.* v. VIII, pp. 38-59, 129-156 (1870)].

2861. **B 10 d.**
CIAMBERLINI (Corrado). Sul sistema di tre forme ternarie quadratiche. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 141-157 (1886)].

B 10 d. (*Vedi* ni 3112, 3139).

2862. **B 11 a, B 11 b.**
BELTRAMI (Eugenio). Sulle funzioni bilineari. [*G. B.*, v. XI, pp. 98-106 (1873)].

2863. **B 11 a, P 2 a, P 2 b, L^1 2.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle forme ternarie bilineari. [*G. B.*, v. XXI, pp. 50-67 (1883)].

2864. **B 11 a, P 2 a, P 2 c, L^2 3 a.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle forme quaternarie bilineari. [*G. B.*, v. XXI, pp. 293-322 (1883)].

2865. **B 11 a, B 11 b, P 1.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle forme binarie bilineari. [*G. B.*, v. XXV, pp. 281-297 (1887)].

2866. **B 11 b.**
SEGRE (Corrado). Teorema sulle relazioni tra una coppia di forme bilineari e la coppia delle loro forme reciproche. [*G. B.*, v. XXII, pp. 29-32 (1884)].

B 11 b. (*Vedi* ni 2862, 2865).

2867. **B 12 a, A 3.**
BELTRAMI (Eugenio). Sulle equazioni algebriche. [*G. B.*, v. I, pp. 123-124 (1863)].

2868. **B 12 a.**
PACI (Paolo). Sui numeri complessi. [*G. B.*, v. XI, pp. 244-245 (1873)].

2869. **B 12 a, D 1 a, D 2, D 3 a, D 3 d, D 4, I 1, Q 2.**
PINCHERLE (Salvatore). Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del prof. C. Weierstrass. pp. 178-254, 317-357 (1880)].

2870. **B 12 d.**
PADELLETTI (Dino). Principii della teoria dei quaternioni elementarmente esposti. [*G. B.*, v. XX, pp. 1-47 (1882)].

2871. **B 12 d.**
RAIMONDI (R.). Sull'equazione vettoriale della circonferenza. [*G. B.*, v. XXV, pp. 219-221 (1887)].

2872. **B 12 d.**
RAIMONDI (R.). Sulle curve d'inversione. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 181-184 (1888)].

2873. **B 12 h.**
RUBINI (Raffaele). Esercizii d'integrazione col calcolo dei simboli d'operazione. [*G. B.*, v. XIX, pp. 118-130 (1881)].

2874. **B 12 h.**
CAZZANIGA (Paolo). Il calcolo dei simboli d'operazione elementarmente esposto. [*G. B.*, v. XX, pp. 48-77, 194-229 (1882)].

2875. **B 12 h, B 1 c.**
AMANZIO (Domenico). Di alcune trasformazioni del simbolo d'operazione

$$V\frac{d}{dx}\cdot U\frac{d}{dx}\ldots Z\frac{d}{dx}\cdot Y\frac{d}{dx}\cdot X\frac{d}{dx}$$

e proprietà di alcuni determinanti che derivano da queste trasformazioni. [*G. B.*, v. XXI, pp. 110-144 (1883)].

2876. **C 1 a.**
TARDY (Placido). Sulle derivate di ordine superiore delle funzioni composte. [*G. B.*, pp. 73-77 (1864)].

2877. **C 1 a.**
MOLLAME (Vincenzo), ALBEGGIANI (Michele). Quistione 29 e soluzione. [*G. B.*, v. XII, pp. 14, 152-153 (1874)].

2878. **C 1 a, K 20 f.**
CALDARERA (Francesco). Sullo sviluppo delle funzioni a variabili piccolissime.— Risoluzione dei triangoli sferici aventi il perimetro di lunghezza minore del diametro della sfera, cui appartengono. [*G. B.*, v. XII, pp. 348-367 (1874)].

2879. **C 1 a.**
FAIS (Antonio). Nota intorno alle derivate di ordine superiore delle funzioni di funzione. [*G. B.*, v. XIII, pp. 47-48 (1875)].

2880. **C 1 a.**

MOSSA (Francesco). Sulla derivazione successiva delle funzioni composte. [*G. B.*, v. XIII, pp. 175-185 (1875)].

2881. **C 1 a.**

AMANZIO (Domenico). Sopra alcune formole. [*G. B.*, v. XV, pp. 257-267 (1877)].

2882. **C 1 a.**

GOMES TEIXEIRA (Francesco). Sur les dérivées d'ordre quelconque. [*G. B.*, v. XVIII, pp. 301-307 (1880)].

2883. **C 1 a, C 2 g.**

BETTAZZI (Rodolfo). Sui concetti di derivazione e d'integrazione delle funzioni di più variabili reali. [*G. B.*, v. XXII, pp. 133-166, 200 (1884)].

2884. **C 1 a.**

BASSANI (Anselmo). Una formola di analisi. [*G. B.*, v. XXV, pp. 225-227 (1887)].

2885 **C 1 a.**

BETTAZZI (Rodolfo). Sulla derivata delle funzioni di due variabili e sulla inversione delle derivazioni. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 21-32 (1888)].

2886. **C 1 c.**

MARTINI (Eligio). Nota sul cangiamento della variabile indipendente. [*G. B.*, v. II, pp. 353-354 (1864)].

2887. **C 1 d.**

FAIS (Antonio). Sopra una forma compendiata delle equazioni differenziali immediate di ordine superiore. [*G. B.*, v. XII, pp. 320-325 (1874)].

2888. **C 1 e.**

FAIS (Antonio). Nota intorno ad alcune formule che si deducono dalla formula di Taylor. [*G. B.*, v. XII, pp. 148-149 (1874)].

C 1 e. (*Vedi* n° 2735).

2889. **C 2 d, H 5 a.**

TORELLI (Gabriele). Di alcuni integrali formati dagli integrali ellittici e di qualche loro applicazione. [*G. B.*, v. XI, pp. 17-37 (1873)].

C 2 d. (*Vedi* n° 2954).

2890. **C 2 e.**

BESSO (Davide). Sull'integrale del prodotto di una funzione razionale pel logaritmo di una funzione razionale. [*G. B.*, v. XXV. pp. 356-362 (1887)].

C 2 g. (*Vedi* n° 2883).

2891. **C 2 h.**

BESSO (Davide). Sull'integrale $\int F(x)\, l\, x\, d\, x$ esteso fra limiti reali e positivi, quando la $F(x)$ sia una funzione razionale. [*G. B.*, v. XII, pp. 1-14 (1874)].

2892. **C 2 h.**

LEMOYNE (Giacomo). Sul valore medio geometrico delle funzioni d'una variabile reale. [*G. B.*, v. XVI, pp. 209-216 (1878)].

2893. **C 2 h.**

VOLTERRA (Vito). Sui principii del calcolo integrale. [*G. B.*, v. XIX, pp. 333-372 (1881)].

2894. **C 2 h.**

BASSANI (Anselmo). Sopra una trasformazione di integrali definiti. [*G. B.*, v. XXV, pp. 223-224 (1887)].

2895. **C 2 k.**

D'ARONE (Giovanni). Intorno ad un teorema di Tchébychew. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 61-64 (1888)].

2896. **C 2 k, A 1 b.**

CESÀRO (Ernesto). A proposito d'un teorema di Tchébychew. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 48-59 (1889)].

2897. **C 3 a.**

PEANO (Giuseppe). Su di una proposizione riferentesi ai determinanti Jacobiani. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 226-228 (1889)].

2898. **C 4 b.**

BELTRAMI (Eugenio). Intorno ad una trasformazione di variabili. [*G. B.*, v. V, 24-27 (1867)].

2899. **D 1 a.**

VOLTERRA (Vito). Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue. [*G. B.*, v. XIX, pp. 76-86 (1881)].

2900. **D 1 a.**

MARCOLONGO (Roberto). Su di un teorema di algebra elementare. [*G. B.*, v. XXV, pp. 174-178 (1887)].

2901. **D 1 a.**

LERCH (M.). Sur une fonction discontinue. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 375-376 (1888)].

D 1 a. (*Vedi* n° 2869).

D 1 b. (*Vedi* n° 2778).

2902. **D 1 d.**

GENOCCHI (Angelo). Intorno ad una trasformazione di alcune equazioni a tre variabili. [*G. B.*, v. V, pp. 106-109 (1867)].

2903. **D 1 d** δ, **D 6 e.**

GIULIANI (Giulio). Sopra la dimostrazione di una formola di analisi. [*G. B.*, v. XXII, pp. 201-206 (1884)].

D 2. (*Vedi* n° 2869).

2904. **D 2 a** α.

DINI (Ulisse). Sulle serie a termini positivi. [*G. B.*, v. VI, pp. 166-174 (1868)].

2905. **D 2 a** α, **D 2 b.**

GIUDICE (Francesco). Una considerazione relativa alle serie a termini positivi costanti tra le quali trovasi quella d'Eulero. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 345-351 (1889)].

2906. **D 2 a** β.

CESÀRO (Ernesto), GIUDICE (Francesco). Quistione 88. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 101 (1888); v. XXVII, pp. 342-344 (1889)].

2907. **D 2 a** γ.

GIULIANI (Giulio). Dell'integrabilità d'una serie di funzioni.—Rettifica. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 44-45, 333 (1886)].

2908. **D 2 a** δ.

RETALI (Virginio). Sulle serie triple. [*G. B.*, v. IX, pp. 266-268 (1871)].

2909. **D 2 b.**

BELTRAMI (Eugenio), ASCOLI (Giulio), PADOVA (Ernesto). Quistione 67, e soluzioni. [*G. B.*, v. V, pp. 189, 254-255 (1867)].

2910. **D 2 b, H 5 f.**

TANO (Florestano). Sopra due serie di Gauss, e di Heine. [*G. B.*, v. IX, pp. 60-63 (1871)].

2911. **D 2 b.**

TORELLI (Gabriele). Sopra alcune serie. [*G. B.*, v. X, pp. 129-132 (1872)].

2912. **D 2 b.**

BESSO (Davide). Sulla serie $\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^p}$. [*G. B.*, v. X, pp. 160-164 (1872)].

D 2 b. (*Vedi* nⁱ 2736, 2905).

2913. **D 2 b α.**
PINCHERLE (Salvatore). Di una generalizzazione della derivazione nelle funzioni analitiche. [*G. B.*, v. XXII, pp. 62-74 (1884)].

2914. **D 2 b α.**
TOGNOLI (Oreste). Sulle serie di potenze. [*G. B.*, v. XXV, pp. 155-160 (1887)].

2915. **D 2 b α.**
CATALAN (Eugène). Lettera del sig. E. Catalan al Redattore. [*G. B.*, v. XXV, pp. 311-312 (1887)].

2916. **D 2 c.**
NOVI (Giovanni). Riduzione in serie delle facoltà analitiche. [*G. B.*, v. II, pp. 1-7, 40-46 (1864)].

2917. **D 2 c, D 6 c δ, J 1 c.**
GAMBARDELLA (Filippo). Sui coefficienti delle facoltà analitiche. — Appendice sullo sviluppo delle funzioni isobariche. [*G. B.*, v. XI, pp. 49-61, 86-97 (1873); v. XII (*), pp. 110-128 (1874)].

2918. **D 2 d.**
EUGENIO (Vito). Alcune ricerche sulle frazioni continue. [*G. B.*, v. IX, pp. 358-365 (1871)].

2919. **D 2 d, I 12 b.**
PORCELLI (Onofrio). Intorno ad una funzione che entra nella composizione delle ridotte delle frazioni continue, e delle radici delle congruenze di 1° grado ad una incognita. [*G. B.*, v. X, pp. 37-46 (1872)].

2920. **D 2 d α.**
GÜNTHER (Sigismondo) (**). Nuovo metodo per sommare direttamente le frazioni continue periodiche. [*G. B.*, v. XVI, pp. 234-242 (1878)].

2921. **D 3, V 9.**
BELTRAMI (Eugenio). Articolo bibliografico sulla « Teorica generale delle funzioni di variabili complesse » del professore Felice Casorati. [*G. B.*, v. VII, pp. 29-41 (1869)].

D 3. (*Vedi* n° 3174).

D 3 a. (*Vedi* n° 2869).

(*) La parte contenuta nel v. XII, per dichiarazione del prof. Gambardella, è dovuta al prof. N. Trudi.

(**) Versione dal tedesco di Giovanni Garbieri.

D 3 d. (*Vedi* n° 2869).

D 3 g. (*Vedi* n° 2956).

D 4. (*Vedi* n° 2869).

2922. **D 4 a, D 4 b.**
VIVANTI (Giulio). Alcuni teoremi sulle funzioni intere. [*G. B.*, v. XXII, pp. 243-261, 378-380 (1884)].

2923. **D 4 a, D 4 b.**
VIVANTI (Giulio). Sulle funzioni intere trascendenti. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 96-122 (1885)].

2924. **D 4 a, D 4 c.**
VIVANTI (Giulio). Nuove ricerche sulle funzioni intere. [*G B.*, v. XXVI, pp. 303-314 (1888)].

2925. **D 4 b α.**
CESÀRO (Ernesto). Remarques sur les fonctions holomorphes. [*G. B.*, v. XXII, pp. 191-200 (1884)].

D 4 c. (*Vedi* n° 2924).

2926. **D 5 d.**
VIVANTI (Giulio). Ricerche sulle funzioni uniformi d'un punto analitico. [*G. B.*, v. XXV, pp. 54-72, 232-256, 312 (1887)].

2927. **D 6 a.**
BETTI (Errico). Sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa definite da una equazione di 3° grado. [*G. B.*, v. III, pp. 143-145 (1865)].

2928. **D 6 b.**
TRUDI (Nicola), PADOVA (Ernesto), ARMENANTE (Angelo), ASCOLI (Giulio). Quistione 54, e soluzioni. [*G. B.*, v. IV, pp. 319, 365-366, 369-372 (1866); v. V, pag. 162 (1867)].

2929. **D 6 b, D 6 d.**
GIUDICE (Francesco). Sulle funzioni iperboliche e circolari. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 124-126 (1889)].

2930. **D 6 c, J 1 c.**
SYLVESTER (James Joseph), SARDI (Ciro). Quistione 56, e soluzione. [*G. B.*, v. IV, pag. 344 (1866); v. V, pp. 169-174 (1867)].

2931. **D 6 c.**
SIACCI (Francesco). Intorno ad una serie e ad una funzione dei coefficienti binomiali. [*G. B.*, v. X, pp. 349-359 (1872)].

2932. **D 6 c α.**
ARZELÀ (Cesare). Sviluppo, in serie ordinate secondo le potenze decrescenti della variabile, di *n* funzioni algebriche definite da altrettante equazioni a coefficienti determinati. [*G. B.*, v. XI, pp. 368-375 (1873)].

D 6 c α. (*Vedi* ni 2760, 3021).

2933. **D 6 c δ.**
TRUDI (Nicola), ARMENANTE (Angelo). Quistione 55, e soluzione. [*G. B.*, v. IV, pp. 319-320 (1866); v. V, pp. 28-30 (1867)].

2934. **D 6 c δ.**
IMCHENETSKY (V.). Sur les fonctions de J. Bernoulli, et sur l'expression de la différence entre une somme et une intégrale de mêmes limites. (Traduit du russe par J. Hoüel). [*G. B.*, v. IX, pp. 87-103 (1871)].

D 6 c δ. (*Vedi* ni 2825, 2917).

D 6 c ε. (*Vedi* n° 2825).

D 6 d. (*Vedi* n° 2929).

2935. **D 6 f.**
GIULIANI (Giulio). Sopra la funzione $P^n(\cos\gamma)$ per n infinito. [*G. B.*, v. XXII, pp. 236-239 (1884)].

2936. **D 6 f, D 6 h.**
GIULIANI (Giulio). Alcune osservazioni sopra le funzioni sferiche di ordine superiore al secondo e sopra altre funzioni che se ne possono dedurre. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 155-171 (1888)].

2937. **D 6 h.**
GIULIANI (Giulio). Sopra certe funzioni analoghe alle sferiche. [*G. B.*, v. XXV, pp. 203-218 (1887)].

D 6 h. (*Vedi* n° 2936).

2938. **D 6 i.**
NICODEMI (Rubino). Intorno ad alcune funzioni più generali delle funzioni iperboliche. [*G. B.*, v. XV, pp. 193-234 (1877)].

2939. **D 6 i.**
GIULIANI (Giulio). Sopra alcune funzioni analoghe alle funzioni cilindriche. [*G. B.*, v. XXV, pp. 198-202 (1887)].

2940. **E 1 a.**

DE GASPARIS (Annibale). Sul calcolo del valore della funzione $\sum \frac{1}{\Gamma(x)}$. [*G. B.*, v. VI, pp. 16-23 (1868)].

2941. **E 1 a.**

LERCH (M.). Démonstration élémentaire d'une formule de Raabe. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 39-40 (1888)].

2942. **E 1 f.**

REALIS (Savino). Esercizio elementare sugl'integrali euleriani della prima specie. [*G. B.*, v. IX, pp. 345-354 (1871)].

2943. **E 3, E 5.**

BESSO (Davide). Sopra alcuni integrali definiti. [*G. B.*, v. X, pp. 119-127 (1872)].

2944. **E 5.**

FERGOLA (Emmanuele), MOGNI (Antonio), PADOVA (Ernesto). Quistioni 49 e 50, e soluzioni. [*G. B.*, v. IV, pag. 318 (1866); v. V, pp. 57-62 (1867); v. VI, pp. 116-120 (1868)].

2945. **E 5.**

FERGOLA (Emmanuele), PADOVA (Ernesto), RAJOLA (Luigi). Quistione 66, e soluzioni. [*G. B.*, v. V, pag. 124 (1867); v. VI, pp. 115, 116-124 (1868)].

2946. **E 5.**

BESSO (Davide). Sull'integral seno, e l'integral coseno. [*G. B.*, v. VI, pp. 313-323 (1868)].

2947. **E 5.**

BESSO (Davide). Sull'integrale $\int_0^\beta \frac{\operatorname{sen}^m x}{x} dx$. [*G. B.*, v. VII, pp. 210-212 (1869)].

2948. **E 5.**

BESSO (Davide). Sopra alcuni integrali doppii. [*G. B.*, v. X, pp. 79-92 (1872)].

E 5. (*Vedi* n° 2943).

2949. **F*.**

RUBINI (Raffaele). Teoria delle funzioni ellittiche. [*G. B.*, t. I, pp. 33-40, 118-122, 140-147, 291-304 (1863)].

2950. **F*, G*.**

ARMENANTE (Angelo), JUNG (Giuseppe). Relazione sopra tre corsi paralleli

dei professori Brioschi, Cremona e Casorati sulla teoria delle funzioni ellittiche, e abeliane. [*G. B.*, v. VII, pp. 224-234 (1869)].

F. (*Vedi* n° 3174).

2951. **F 1.**
BRIOSCHI (Francesco). Lezioni sulla teorica delle funzioni Jacobiane ad un solo argomento. [*G. B.*, v. II, pp. 8-12, 33-39, 129-134 (1864)].

2952. **F 1 g.**
TOGNOLI (Oreste). Sulla funzione σu. [*G. B.*, v. XXV, pp. 367-378 (1887)].

F 2. (*Vedi* n° 2958).

2953. **F 6 b, O 2 c γ.**
PACI (Paolo). Sopra alcune applicazioni geometriche delle funzioni ellittiche. [*G. B.*, v. XII, pp. 97- (1874)].

2954. **F 7 c, C 2 d.**
TORELLI (Gabriele). Intorno agli integrali ellittici considerati come funzioni del modulo. [*G. B.*, v. XII, pp. 168-175 (1874)].

2955. **F 8 f.**
PEANO (Giuseppe). Definizione geometrica delle funzioni ellittiche. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 255-256 (1888)].

F 8 g. (*Vedi* n° 3209).

G. (*Vedi* n° 2950).

2956. **G 1 c, D 3 g.**
JANNI (Giuseppe). Studii di analisi superiore. [*G. B.*, v. XIV, pp. 321-346 (1876)].

2957. **G 2 j.**
MARTINI (Eligio). Sull'integrazione per approssimazione. [*G. B.*, v. III, pp. 91-94 (1865)].

2958. **G 6 c, F 2, H 11 c.**
PINCHERLE (Salvatore). Ricerche sopra una classe importante di funzioni monodrome. [*G. B.*, v. XVIII, pp. 92-136 (1880)].

2959. **H 1 a.**
FERGOLA (Emmanuele). Sopra una proposizione elementare di calcolo integrale. [*G. B.*, v. II, pp. 264-266 (1864)].

2960. **H 2 c, B 3 a.**
TORELLI (Gabriele). Contribuzione alla teoria delle equazioni algebrico-differenziali. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 280-289 (1886)].

2961. **H 2 c β.**
CAZZANIGA (Paolo). Sulla integrazione delle equazioni algebrico-differenziali di 1° ordine e di 1° grado mediante funzioni algebriche. [*G. B.*, v. XVIII, pp. 72-91 (1880)].

2962. **H 2 c β.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sull'equazione differenziale ellittica. [*G. B.*, v. XIX, pp. 65-75 (1881)].

H 2 c β. (*Vedi* n° 2859).

2963. **H 3 b, R 4, R 7, R 8.**
GROSSO (Remigio del). Sull'equazioni differenziali che si presentano nei problemi di meccanica. [*G. B.*, v. I, pp. 129-135, 203-208, 257-264 (1863); v. IV, pp. 243-277 (1866)].

H 4. (*Vedi* n° 3502).

2964. **H 4.**
RICCI (Gregorio). Sopra un sistema di due equazioni differenziali lineari di cui l'una è quella dei fattori integranti dell'altra. [*G. B.*, v. XV, pp. 135-153 (1877)].

2965. **H 5 a, H 12 b.**
TRUDI (Nicola). Sulla determinazione delle costanti arbitrarie negl'integrali delle equazioni lineari così differenziali che a differenze finite (*). [*G. B.*, v. VII, pp. 76-97 (1869)].

H 5 a. (*Vedi* n° 2889).

2966. **H 5 f, H 5 h.**
GIULIANI (Giulio). Aggiunte ad una memoria del sig. Kummer. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 234-250 (1888)].

H 5 f. (*Vedi* n° 2910).

H 5 h. (*Vedi* n° 2966).

2967. **H 6 b.**
PITTARELLI (Giulio). Su di una equazione differenziale di primo ordine a un numero qualunque di variabili. [*G. B.*, v. XIII, pp. 323-327 (1875)].

(*) Estratto dal v. II degli Atti della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche in Napoli.

2968. **H 6 b.**

FAIS (Antonio). Intorno all'integrazione delle equazioni differenziali totali di 1° ordine e di 1° grado. [*G. B.*, v. XIII, pp. 344-351 (1875)].

2969. **H 9 d, O 5 m.**

FRATTINI (Giovanni). Un esempio sulla teoria delle coordinate curvilinee applicata al calcolo integrale. [*G. B.*, v. XV, pp. 1-27 (1877)].

2970. **H 10 d.**

GRANDI (Agostino). Di una formola nota che si può dedurre da un teorema di Cauchy. [*G. B.*, v. VII, pp. 374-375 (1869)].

2971. **H 10 d α.**

CAPELLI (Alfredo). Sopra l'integrale dell'equazione alle derivate parziali di Laplace. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 123-157 (1885)].

2972. **H 10 d α.**

GIULIANI (Giulio). Sulle funzioni di n variabili reali che soddisfano alla

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}=0.$$

[*G. B.*, v. XXV, pp. 109-114 (1887)].

H 11 c. (*Vedi* n° 2958).

2973. **H 12 a.**

STUDNICKA (Francesco). Intorno al calcolo delle operazioni. [*G. B.*, v. X, pp. 76-78 (1872)].

H 12 a. (*Vedi* n^{i} 2723, 2812).

H 12 b. (*Vedi* n° 2965).

2974. **I 1.**

SARDI (Ciro). Teoremi di aritmetica. [*G. B.*, v. VII, pp. 24-27 (1869)].

2975. **I 1.**

BARILLARI (Giuseppe). Sulla divisibilità dei numeri periodici, e sulla determinazione dei periodi decimali. [*G. B.*, v. IX, pp. 125-135 (1871)].

2976. **I 1.**

BUSTELLI (Antonio Maria). Sul concetto di proporzionalità nell'aritmetica generale. [*G. B.*, v. XIII, pp. 82-98 (1875)].

2977. **I 1.**

TIRELLI (Francesco). Soluzione di una questione sui numeri fratti. [*G. B.*, v. XVI, pp. 88-90 (1878)].

2978. **I 1.**
ZANOTTI BIANCO (Ottavio). Proprietà curiosa di alcuni numeri. [*G. B.*, v. XXII, pag. 50 (1884)].

2979. **I 1.**
GRÜNWALD (Vittorio). Intorno all'aritmetica dei sistemi numerici a base negativa con particolare riguardo al sistema numerico a base negativo-decimale per lo studio delle sue analogie coll'aritmetica ordinaria (decimale). [*G. B.*, v. XXIII, pp. 203-221 (1885)].

2980. **I 1.**
ANDREINI (Angiolo). Sopra una proprietà singolare di alcuni numeri dipendente dal sistema particolare di numerazione nel quale sono scritti. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 315-326 (1888)].

2981. **I 1.**
GAMBIOLI (Dionisio). A proposito di una Nota del sig. Andreini. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 334-339 (1889)].

I 1. (*Vedi* ni 2720, 2869).

2982. **I 2.**
SARDI (Ciro). Sulle somme dei divisori dei numeri. [*G. B.*, v. VII, pp. 112-115 (1869)].

I 2 b. (*Vedi* n° 3036).

2983. **I 3.**
DINA (Carlo). Teorica delle congruenze bimodulari. [*G. B.*, v. XXI, pp. 234-269 (1883)].

I 3. (*Vedi* ni 2765, 3034).

2984. **I 3 a.**
SARDI (Ciro). Risoluzione delle congruenze di 1° grado. [*G. B.*, v. VII, pp. 115-116 (1869)].

2985. **I 3 b.**
GARIBALDI (Cesare). Nuova dimostrazione d'un teorema di Fermat. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 197-200 (1888)].

I 3 b. (*Vedi* n° 3092).

I 4. (*Vedi* ni 2764, 3034).

2986. **I 4 a.**
PIUMA (Carlo Maria). Nota intorno ad una proposizione nella teoria dei numeri. [*G. B.*, v. IV, pp. 345-347 (1866)].

I 7 a. (*Vedi* n° 2764).

2987. **I 7 b.**
FRATTINI (Giovanni). Un teorema aritmetico. [*G. B.*, v. XVIII, pp. 369-376 (1880)].

2988. **I 8.**
JUNG (Giuseppe). Sopra alcuni teoremi di Gauss intorno alla teorica della ripartizione del circolo. [*G. B.*, v. VI, pp. 67-80 (1868)].

2989. **I 8 a.**
PASCAL (Ernesto). Costruzioni geometriche di tre poligoni regolari. [*G. B.*, v. XXV, pp. 82-96 (1887)].

2990. **I 9 b.**
LUGLI (Aurelio). Sul numero dei numeri primi da 1 ad n. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 86-95 (1888)].

2991. **I 9 c.**
SARDI (Ciro). Nota sui numeri primi. [*G. B.*, v. V, pp. 371-376 (1867)].

2992. **I 10.**
FERGOLA (Emmanuele), SARDI (Ciro), MOLA (Giacomo). Quistioni 5, 6, 7 e soluzioni. [*G. B.*, v. I, pp. 63-64 (1863); v. III, pp. 94-99, 190-201, 377-380 (1865)].

2993. **I 10.**
FERGOLA (Emmanuele). Sopra talune proprietà delle soluzioni intere e positive dell'equazione $\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + 3\,\alpha_3 + \ldots + n\,\alpha_n = n$. [*G. B.*, v. I, pp. 328-334 (1863)].

2994. **I 10.**
SARDI (Ciro). Su talune serie ed applicazioni all'aritmetica. [*G. B.*, v. VII, pp. 257-312 (1869)].

2995. **I 10, B 4 h.**
CAPELLI (Alfredo). Sopra un problema di partizione in relazione alla teoria delle forme algebriche. [*G. B.*, v. XIX, pp. 87-115 (1881)].

I 10. (*Vedi* ni 3024, 3485).

2996. **I 11 a.**
PIUMA (Carlo Maria). Dimostrazione di alcune formole del sig. Liouville. [*G. B.*, v. IV, pp. 1-14, 65-75, 193-201 (1866)].

2997. **I 11 a, I 19 a.**
FERGOLA (Emmanuele), TORELLI (Gabriele). Quistioni e soluzioni. [*G. B.*, v. X, pag. 54 (1872); v. XVI, pp. 152-167 (1878)].

2998. **I 11 a, I 19 a.**
TORELLI (Gabriele). Sopra alcune proprietà numeriche. [*G. B.*, v. XVI, pp. 152-167 (1878)].

2999. **I 11 a, I 11 b.**
CESÀRO (Ernesto). Sull'inversione delle identità aritmetiche. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 168-174 (1885)].

3000. **I 11 a, I 11 b.**
CESÀRO (Ernesto). Gli algoritmi delle funzioni aritmetiche. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 175-181 (1885)].

3001. **I 11 a, I 11 b, B 1 a.**
CESÀRO (Ernesto). Determinanti in aritmetica. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 182-197 (1885)].

3002. **I 11 a, I 11 c.**
CESÀRO (Ernesto). Medie ed assintotiche espressioni in aritmetica. [*G. B.*, v. XXV, pp. 1-14 (1887)].

3003. **I 11 a.**
CESÀRO (Ernesto). Intorno ad una classe di funzioni aritmetiche. [*G. B.*, v. XXV, pp. 14-19 (1887)].

3004. **I 11 a, J 1 d.**
PASCAL (Ernesto). Sopra una formola numerica. [*G. B.*, v. XXV, pp. 45-49 (1887)].

I 11 b. (*Vedi* ni 2748, 2999, 3000, 3001).

I 11 c. (*Vedi* n° 3002).

3005. **I 12 b.**
GAMBARDELLA (Filippo). Sul numero delle soluzioni intere e positive dell'equazione $ax+by+cz=m$, dove a, b, c, m sono numeri interi e positivi. [*G. B.*, v. IX, pp. 262-265 (1871)].

3006. **I 12 b, P 4 c.**
JONQUIÈRES (E. de). Étude sur une question d'analyse indéterminée. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 1-11 (1886)].

I 12 b. (*Vedi* ni 2722, 2919).

3007. **I 13 b α.**
EUGENIO (Vito). Dimostrazione di un teorema nella teoria dei numeri. [*G. B.*, v. VIII, pp. 162-165 (1870)].

3008. **I 17, I 25 b.**
TIRELLI (Francesco), ANGELITTI (Filippo). Questione 35 e soluzione. [*G. B.*, v. XIII, pp. 46, 98, 198-200 (1874)].

3009. **I 17 a.**
GENOCCHI (Angelo). Dimostrazione d'un teorema intorno al prodotto d'alcune somme di quadrati. [*G. B.*, v. II, pp. 47-48 (1864)].

3010. **I 19 a.**
CALZOLARI (Luigi). Nuova soluzione generale in numeri razionali dell'equazione $w^2 = a + bv + cv^2$. [*G. B.*, v. VII, pp. 177-192 (1869)].

3011. **I 19 a.**
CALZOLARI (Luigi). Soluzione generale dell'equazione $y^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$. [*G. B.*, v. VII, pp. 313-350 (1869)].

3012. **I 19 a.**
CALZOLARI (Luigi). Nota sull'equazione $u^2 = Ax^2 \pm By^2$. [*G. B.*, v. VIII, pp. 28-34 (1870)].

3013. **I 19 a.**
MARCOLONGO (Roberto). Sull'analisi indeterminata di 2° grado. — Nota I^a — Nota II^a. [*G. B.*, v. XXV, pp. 161-173 (1887); v. XXVI, pp. 65-85 (1888)].

I 19 a. (*Vedi* n^i 2997, 2998).

3014. **I 19 b.**
PIUMA (Carlo Maria). Intorno all'equazione $x^2 + y^2 = z^2$. [*G. B.*, v. XIX, pp. 311-315 (1881)].

3015. **I 19 b.**
VARISCO (Dino). Ricerche aritmetiche contenenti la dimostrazione generale del teorema di Fermat. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 371-380 (1889)].

3016. **I 19 c.**
CALZOLARI (Luigi). Ricerca dei valori razionali di v che rendono un quadrato il polinomio

$$a + bv + cv^2 + dv^3 + ev^4.$$

[*G. B.*, v. VII, pp. 317-350 (1869)].

3017. **I 24 b.**
TOGNOLI (Oreste). Intorno ad un problema della geometria elementare. (Da una memoria del sig. Adolph Hurwitz). [*G. B.*, v. XXIV, pp. 354-363 (1886)].

I 25 b. (*Vedi* n° 3008).

J 1. (*Vedi* n° 2737).

3018. **J 1 c.**
FERGOLA (Emmanuele), PADOVA (Ernesto), TORELLI (Gabriele), BONOLIS (Alfonso). Quistione 52, e soluzioni. [*G. B.*, v. IV, pp. 318-319, 361-365, 367 (1866); v. V, pp. 30-31, 250-253 (1867)].

3019. **J 1 c.**
FERGOLA (Emmanuele), TORELLI (Gabriele). Quistione 53, e soluzione. [*G. B.*, v. IV, pp. 319, 368 (1866)].

3020. **J 1 c, D 6 c ε.**
FERGOLA (Emmanuele), SARDI (Ciro). Quistione 57, e soluzione. [*G. B.*, v. IV, pag. 380 (1866); v. V, pp. 169-174 (1867)].

3021. **J 1 c, D 6 c α.**
TORELLI (Gabriele). Sopra una divisibilità enunciata dal Prof. Fergola. [*G. B.*, v. V, pp. 250-253 (1867)].

3022. **J 1 c.**
LEMOYNE (Giacomo). Intorno a un problema di partizione sopra alcune funzioni simmetriche. [*G. B.*, v. X, pp. 93-96 (1872)].

J 1 c. (*Vedi* ni 2744, 2750, 2792, 2917, 2930).

3023. **J 1 d.**
BONOLIS (Alfonso). Ricerca de' valori delle formole

$$\sum_{k=0}^{k=k}\left|\binom{k+1}{1}\binom{s-3}{0}+\binom{k+1}{2}\binom{s-3}{1}+\cdots+\binom{k+1}{k+1}\binom{s-3}{k}\right|$$

$$\sum_{k=0}^{k=n-1}\left|\binom{k+1}{1}\binom{s-3}{0}+\binom{k+1}{2}\binom{s-3}{1}+\cdots+\binom{k+1}{k+1}\binom{s-3}{k}\right|(n-k).$$

[*G. B.*, v. XI, pp. 233-243 (1873)].

3024. **J 1 d, I 10.**
MARSANO (Giovan Battista). Sul numero delle combinazioni di data classe, fatte con una certa moltitudine degli interi successivi, ed aventi ciascuna una somma non maggiore d'un limite assegnato. [*G. B.*, v. XIX, pp. 156-170 (1881)].

3024 bis. **J 1 d, I 10.**
MARSANO (Giovan Battista). Sul numero delle combinazioni tre a tre dei suc-

cessivi intieri 1, 2, 3 ..., *B*, aventi ciascuna una somma non maggiore di *C* (*). [*G. B.*, v. XX, pp. 249-269 (1882)].

J 1 d. (*Vedi* n° 3004).

3025. **J 1 d γ.**
MORENO (Giuseppe). Dimostrazione d'un teorema di Eisenstein. [*G. B.*, v. XVI, pp. 174-176 (1878)].

J 2. (*Vedi* n° 3498).

3026. **J 2 e.**
GILETTA (Luigi). Intorno ai fondamenti del principio dei minimi quadrati. [*G. B.*, v. XVIII, pp. 159-173 (1880)].

3027. **J 2 e.**
PIZZETTI (Paolo). Alcune ricerche sulla probabilità a priori degli errori d'osservazione. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 77-89 (1889)].

J 2 e. (*Vedi* n° 3472).

3028. **J 2 f.**
ZANOTTI BIANCO (Ottavio). Sopra un problema di probabilità. [*G. B.*, v. XVI, pp. 169-173 (1878)].

3029. **J 2 f.**
PIUMA (Carlo Maria). Soluzione d'un problema elementare nel calcolo delle probabilità. [*G. B.*, v. XVII, pp. 360-372 (1879)].

3030. **J 2 f.**
CESÀRO (Ernesto). Ellisse o iperbole? (Questioni di probabilità). [*G. B.*, v. XXII, pp. 44-46 (1884)].

3031. **J 2 f.**
CESÀRO (Ernesto), DE MARCO (Gaetano). Quistioni 45, 50 e soluzioni. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 19, 230-232 (1885)].

3032. **J 2 f.**
CESÀRO (Ernesto), DE MARCO (Gaetano). Quistioni 53 e 55 e soluzioni. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 79, 167, 377-378 (1885)].

3033. **J 2 f.**
CESÀRO (Ernesto). La rottura del diamante. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 124-127 (1886)].

(*) Questa è la continuazione della nota precedente (n° 3024).

3034. **J 4, B 2, I 3, I 4.**

JANNI (Giuseppe). Esposizione della teorica delle sostituzioni (*). [*G. B.*, v. IX, pp. 280-340 (1871); v. X, pp. 193-206 (1872); v. XI, pp. 1-16, 71-85, 257-300 (1873)].

3035. **J 4.**

JORDAN (Camille). Note sur la théorie des substitutions. [*G. B.*, v. X, pag. 116 (1872)].

3036. **J 4 a, I 2 b.**

CAPELLI (Alfredo). Dimostrazione di due proprietà numeriche offerte dalla teoria delle sostituzioni ed osservazioni sopra le sostituzioni permutabili con una sostituzione data. [*G. B.*, v. XIV, pp. 66-74 (1876)].

3037. **J 4 a, J 4 b.**

CAPELLI (Alfredo). Sopra l'isomorfismo dei gruppi di sostituzioni. [*G. B.*, v. XVI, pp. 32-87 (1878)].

3038. **J 4 a.**

GRANDI (Agostino). Un teorema sulla rappresentazione analitica delle sostituzioni sopra un numero primo di elementi. [*G. B.*, v. XIX, pp. 238-245 (1881)].

3039. **J 4 a α.**

CESÀRO (Ernesto). Alcune elementari proprietà dei gruppi più volte transitivi. [*G. B.*, v. XXII, pp. 47-49 (1884)].

J 4 b. (*Vedi* n° 3037).

3040. **J 4 c.**

CAPELLI (Alfredo). Intorno ai valori di una funzione lineare di più variabili. [*G. B.*, v. XIV, pp. 141-145 (1876)].

3041. **J 5, Q 1 a, Q 2.**

LORIA (Gino). La definizione di spazio ad *n* dimensioni, e l'ipotesi di continuità nel nostro spazio, secondo le ricerche di G i o r g i o C a n t o r. [*G. B.*, v. XXV, pp. 97-108 (1887)].

3042. **J 11 a.**

FERGOLA (Emmanuele), MOLA (Giacomo), SARDI (Ciro). Quistione 7, e soluzione. [*G. B.*, v. I, pp. 64, 221-222 (1863); v. III, pp. 94-99, 377-380, 190-201 (1865)].

(*) Cfr. n° 3035.

3043. **K 1 a.**

DORNA (Alessandro). Sulle trasversali nel triangolo. [*G. B.*, v. III, pag. 4 (1865)].

3044. **K 1 a.**

CESÀRO (Ernesto). Studio di trasversali. [*G. B.*, v. XXII, pp. 240-242 (1884)].

3045. **K 1 b β.**

MOGNI (Antonio), TARLASCO (Antonio), ASCOLI (Giulio), EUGENIO (Vito). Quistione 48, e soluzioni. [*G. B.*, v. IV, pp. 293, 359-360, (1866); v. VII, pag. 256 (1869)].

K 2 a. (*Vedi* n° 3084).

3046. **K 2 b, K 3 c.**

ARMENANTE (Francesco). Soluzioni di alcune questioni proposte nell'*Educational Times*. [*G. B.*, v. XI, pp. 250-252 (1873)].

3047. **K 2 c.**

TRUDI (Nicola). Intorno ad alcune proprietà del cerchio dei nove punti. [*G. B.*, v. I, pp. 29-32 (1863)].

3048. **K 2 c.**

RAJOLA (Luigi). Tre teoremi sul cerchio dei nove punti. [*G. B.*, v. IV, pp. 238-239 (1866)].

3049. **K 2 c, Q 1.**

FRATTINI (Giovanni). Un caso particolare del teorema dei nove punti di Feuerbach. Sua generalizzazione nella geometria non euclidea. [*G. B.*, v. XVI, pp. 298-304 (1878)].

K 2 c. (*Vedi* ni 3050, 3051, 3052, 3091).

3050. **K 2 d, K 2 c, L¹ 16.**

BELTRAMI (Eugenio). Sulle coniche di nove punti. [*G. B.*, v. I, pp. 109-118 (1863)].

3051. **K 2 d, K 2 c, L¹ 16.**

CASSANI (Pietro). Studio intorno alla conica dei nove punti e delle nove rette. [*G. B.*, v. VII, pp. 369-373 (1869)].

3052. **K 2 d, K 2 c, L¹ 16.**

CASSANI (Pietro). Nota sulla conica dei 9 punti e delle 9 rette. [*G. B.*, v. VIII, pp. 374-376 (1870)].

3053. **K 2 d.**

BARDELLI (Giuseppe). Relazioni metriche e di posizione nel triangolo rettilineo. [*G. B.*, v. XIV, pp. 241-262 (1876)].

K 2 d. (*Vedi* ni 3091, 3155).

K 3 c. (*Vedi* n° 3046).

K 5 c. (*Vedi* n° 3079).

3054. **K 5 d.**
MOLLAME (Vincenzo). Problema di geometria. [*G. B.*, v. V, pag. 370 (1867)].

3055. **K 5 d.**
PRESUTTI (Enrico). Proprietà di alcuni triangoli. [*G. B.*, v. XXI, pp. 169-172 (1883)].

3056. **K 5 d, L^1 15 f.**
PIUMA (Carlo Maria). Soluzione di un problema proposto dal sig. Lucas. [*G. B.*, v. XXII, pp. 17-28 (1884); v. XXVI, pp. 189-196 (1888)].

3057. **K 5 d, L^1 16 a.**
PIUMA (Carlo Maria). Intorno ai triangoli iscritti in un'ellisse che hanno il centro di gravità in un punto dato della sua superficie. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 30-33 (1885)].

3058. **K 6.**
LORIA (Gino). Studi sulla teoria delle coordinate triangolari, e sulla geometria analitica di un piano nello spazio. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 164-241 (1886)].

3059. **K 6 a, L^1 3 a.**
TRUDI (Nicola). Esposizione di diversi sistemi di coordinate omogenee. [*G. B.*, v. I, pp. 11-25, 47-59, 148-158 (1863)].

3060. **K 6 a, L^1 1 a, L^2 1 a, V 9.**
BELTRAMI (Eugenio). Cenno Bibliografico della Memoria di Chelini Domenico: « Sulla teoria dei sistemi semplici di coordinate e sulla discussione dell'equazione generale di 2° grado in coordinate triangolari e tetraedriche ». [*G. B.*, v. I, pp. 319-320 (1863)].

3061. **K 6 a.**
D'OVIDIO (Errico). Sui punti, piani, e rette in coordinate omogenee. [*G. B.*, v. VIII, pp. 241-284 (1870)].

3062. **K 6 a.**
D'OVIDIO (Errico). Sulle relazioni metriche in coordinate omogenee. [*G. B.*, v. XI, pp. 197-220 (1873)].

3063. **K 6 a.**
D'ARCAIS (Francesco). Sui sistemi di coordinate. [*G. B.*, v. XVI, pp. 18-25 (1878)].

K 6 a. (*Vedi* n° 3105).

3064. **K 6 b.**
CASSANI (Pietro). Coordinate sferiche omogenee. [*G. B.*, v. **VI**, pp. **81-96** (1868)].

3065. **K 6 b.**
D'OVIDIO (Errico). Alcune relazioni fra le mutue distanze di più punti. [*G. B.*, v. IX, pp. 211-216 (1871)].

3066. **K 6 b.**
D'OVIDIO (Errico). Sopra alcune formole in coordinate di rette. [*G. B.*, v. X, pp. 33-36 (1872)].

3067. **K 6 b.**
LEVI (Simeone). Sulle coordinate trigonali. [*G. B.*, v. XIV, pp. 353-376 (1876)].

3068. **K 6 b, U 10 a.**
DE BERARDINIS (Giovanni). Le coordinate geodetiche ortogonali e le geografiche sulla sfera e sull'ellissoide di rotazione. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 127-152, 318-326 (1889)].

3069. **K 7, P 1 a, P 1 f.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Teoria elementare delle forme geometriche. [*G. B.*, v. I, pp. 1-6, 41-46, 97-109, 161-169, 227-239 (1863)].

3070. **K 7 d, B 4 f.**
CREMONA (Luigi), BATTAGLINI (Giuseppe). Quistioni 16, 17, 18, e soluzioni. [*G. B.*, v. I, pp. 280, 311-316 (1863)].

3071. **K 7 d, K 7 e.**
CREMONA (Luigi), JANNI (Vincenzo), BATTAGLINI (Giuseppe). Quistione 28, e soluzioni. [*G. B.*, v. II, pp. 30, 49-51, 52-57 (1864)].

3072. **K 7 d, K 7 e.**
CREMONA (Luigi), BATTAGLINI (Giuseppe). Quistioni 30, 31 e soluzioni. [*G. B.*, v. II, pp. 62, 186-190 (1864)].

3073. **K 7 e.**
CREMONA (Luigi), BATTAGLINI (Giuseppe). Quistione 24, e soluzione. [*G. B.*, v. I, pp. 319, 369-378 (1863)].

K 7 e. (*Vedi* ni 2838, 3071, 3072, 3132).

3074. **K 8 a, K 13 c.**
MATTHIESSEN (Louis). Quelques théorèmes sur le quadrilatère. [*G. B.*, v. V, pp. 232-233 (1867)].

3075. **K 9 a, K 14 b.**
CASSANI (Pietro). Intorno agli assi armonici di un sistema di rette e di piani. [*G. B.*, v. IV, pp. 128-130 (1866)].

3076. **K 9 a.**
CESÀRO (Ernesto), DE MARCO (Gaetano). Quistioni 48, 54 e soluzioni. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 19, 79 (1885); v. XXIV, pp. 378-380 (1886)].

3077. **K 9 a.**
CERTO (Luigi). Sui poligoni piani semplici. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 366-367 (1885)].

3078. **K 9 a.**
CERTO (Luigi). Sull'*n*-agono inscritto isoclino in un *n*-agono piano semplice dato. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 46-60 (1888)].

K 9 a. (*Vedi* n° 3087).

K 9 a α. (*Vedi* n° 3134).

3079. **K 10 b, K 5 c.**
AFFOLTER (Fr. G.). Dimostrazione elementare della proprietà che due triangoli polari d'un circolo sono in posizione prospettiva. [*G. B.*, v. XI, pp. 110-111 (1873)].

3080. **K 10 c.**
MAZZOLA (Giuseppe). Metodo elementare per calcolare speditamente valori prossimi del rapporto della circonferenza al diametro, e per trovare tanti termini quanti si vogliono delle serie circolari. [*G. B.*, v. II, pp. 92-94, 110-114 (1864)].

3081. **K 10 c.**
CROCCHI (Leopoldo). Osservazioni e questione. [*G. B.*, v. X, pp. 304-306 (1872)].

3082. **K 10 e.**
SERRA (Alberto). Costruzione del cerchio che taglia armonicamente tre segmenti dati. [*G. B.*, v. II, pp. 127-128 (1864)].

3083. **K 10 e.**
EUGENIO (Vito), FUORTES (Tarquinio). Dimostrazione di un teorema di Eulero. [*G. B.*, v. VII, pp. 377-378 (1869)].

3084. **K 11 a, K 2 a.**
GENOCCHI (Angelo), ASCOLI (Giulio). Quistioni 58, 59 e so[illegible]
v. V, pp. 122, 163-165 (1867)].

3085. **K 11 c.**
INTRIGILA (Carmelo). Sui poligoni iscritti e circoscritti contemporaneamente a due circonferenze. [*G. B.*, v. XXI, pp. 323-342 (1883)].

K 11 d. (*Vedi* n° 3095).

3086. **K 11 e, B 1 c.**
CASSANI (Pietro). Intorno ad un teorema del sig. E. Lucas. [*G. B.*, v. XIV, pp. 347-350 (1876)].

3087. **K 11 e, K 9 a.**
FUORTES (Tarquinio). Ricerche geometriche sopra alcune proprietà dei sistemi di rette nel piano, e dei sistemi di circoli che passano per un punto sul piano o sulla sfera. [*G. B.*, v. XVI, pp. 91-107 (1878)].

3088. **K 13 a.**
STAMMER (Guillaume). De la plus courte distance entre deux droites dans l'espace, et d'un cas particulier d'une fonction de deux variables indépendantes dont le rapport a une limite déterminée. [*G. B.*, v. V, pp. 236-239 (1867)].

3089. **K 13 a.**
BELTRAMI (Eugenio). Sulla minima distanza di due rette. [*G. B.*, v. V, pp. 351-354 (1867)].

3090. **K 13 a.**
VALERIANI (Valeriano). Del piano, sua definizione, assioma del piano elevato a teorema. [*G. B.*, v. VII, pag. 376 (1869)].

3091. **K 13 c, K 2 d, K 2 c.**
BELTRAMI (Eugenio). Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche di nove punti. [*G. B.*, v. I, pp. 208-217, 354-360 (1863)].

3092. **K 13 c, I 3 b, I 2 b.**
MOGNI (Antonio). Esercitazioni matematiche: I. Di una proprietà del tetraedro. —II. Di alcuni teoremi aritmetici.—III. Sopra il numero dei divisori di alcuni interi. [*G. B.*, v. XIII, pp. 150-154 (1875)].

K 13 c. (*Vedi* n° 3074).

K 14 b. (*Vedi* n° 3075).

3093. **K 14 f.**
JANNI (Vincenzo). Dimostrazione di un teorema di geometria elementare. [*G. B.*, v. VI, pag. 371 (1868)].

3094. **K 16, K 17, L² 2 g.**
CASSANI (Pietro). Saggio elementare di geometria della sfera. [*G. B.*, v. IV, pp. 15-32, 131-149, 223-237, 373-380 (1866)].

K 17. (*Vedi* n° 3094).

3095. **K 18 e, K 11 d.**
MOLLAME (Vincenzo). Teoremi di geometria. [*G. B.*, v. IX, 64-67 (1871)].

3096. **K 20.**
MALAGOLI (R.), NANNEI (Enrico). Le formole fondamentali per la trigonometria della ellissi. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 60-76 (1889)].

K 20. (*Vedi* n¹ 2740, 3482).

3097. **K 20 a.**
DI LEGGE (Alfonso). Formole relative al seno e coseno della somma degli archi. [*G. B.*, v. IX, pp 377-379 (1871)].

K 20 f. (*Vedi* n° 2878).

3098. **K 21 b.**
GARBIERI (Giovanni). Trisezione dell'angolo. [*G. B.*, v. XV, pp. 111-112 (1877)].

K 22. (*Vedi* n° 3501).

K 22 a. (*Vedi* n° 3496).

K 22 d. (*Vedi* n° 3104).

3099. **K 23 a.**
UGLIENI (Marco) (*). I principii della prospettiva lineare secondo Taylor. [*G. B.*, v. III, pp. 338-343 (1865)].

3100. **K 23 a, P 1 d.**
REGIS (Domenico). Sopra un'applicazione dei principii di omologia alla prospettiva. [*G. B.*, v. VIII, pp. 222-225 (1870)].

3101. **K 23 a.**
MOGNI (Antonio). Sulla proiezione centrale. [*G. B.*, v. XIII, pp. 186-197 (1875)].

K 23 a. (*Vedi* n° 3104).

3102. **K 23 c.**
PANTANELLI (Dante). Disegno assonometrico. Determinazione grafica ed ana-

(*) Anagramma.

litica dei coefficienti di riduzione dell'unità degli assi coordinati in funzione dei lati del triangolo traccia del piano di projezione sui piani coordinati. [*G. B.*, v. VIII, pp. 161-165 (1870)].

3103. **K 23 c.**

F. N. Del cambiamento dei piani coordinati nel metodo delle proiezioni axonometriche. [*G. B.*, v. XII, pp. 154-160 (1874)].

3104. **L^1, K 22 d, K 23 a, V 7.**

CREMONA (Luigi). Notizia bibliografica sulle: «Œuvres de Desargues réunies et analysées par M. Poudra» (*). [*G. B.*, v. II, pp. 115-121 (1864)].

3105. **L^1, K 6 a.**

D'OVIDIO (Errico). Nuova esposizione della teoria generale delle curve di 2° ordine in coordinate trilineari. [*G. B.*, v. VI, pp. 46-66, 190-216, 259-283 (1868); v. VII, pp. 1-16 (1869)].

3106. **L^1 1 a.**

JANNI (Vincenzo). Teoria geometrica delle curve del 2° ordine. [*G. B.*, v. I, pp. 7-10, 77-81 (1863)].

L^1 1 a. (*Vedi* n° 3060).

3107. **L^1 1 b.**

DEWULF (Édouard). Note sur les démonstrations de deux théorèmes données par M. Cremona dans ses *Éléments de Géométrie Projective.* [*G. B.*, v. XIII, pp. 168-169 (1875)].

3108. **L^1 1 c.**

JANNI (Vincenzo), BATTAGLINI (Giuseppe). Quistione 13, e soluzione. [*G. B.*, v. I, pp. 224, 369 (1863)].

3109. **L^1 1 c.**

HESSE (Otto). Ciclo di equazioni fra determinanti. (Generalizzazione analitica del teorema di Pascal) (**). [*G. B.*, v. XI, pp. 309-317 (1873)].

3110. **L^1 1 c.**

AMODEO (Federico). Teorema di geometria proiettiva. [*G. B.*, v. XVIII, pp. 15-16 (1880)].

(*) Estratta dagli Annali di Matem. pura ed applicata.

(**) Estratto dalle dissertazioni della R. Accademia Bavarese. Traduzione del Dr. Valeriani Valeriano.

L¹ 1 c. (*Vedi* n° 3190).

3111. **L¹ 1 c α.**

JANNI (Vincenzo). Sulla notazione abbreviata applicata al teorema di Brianchon. [*G. B.*, v. II, pp. 253-255 (1864)].

L¹ 1 d. (*Vedi* ni 3112, 3135).

3112. **L¹ 1 f, L¹ 1 d, B 10 d.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle forme binarie dei primi quattro gradi appartenenti ad una forma ternaria quadratica. [*G. B.*, v. V, pp. 39-56 (1867)].

3113. **L¹ 1 f, B 10 b α, B 7 a, B 7 f, L¹ 17, L² 20.**

PITTARELLI (Giulio). Le coniche e le forme binarie quadratiche e cubiche. [*G. B.*, v. XXI, pp. 19-49 (1883)].

3114. **L¹ 1 f, B 7 a.**

PITTARELLI (Giulio). Gli elementi imaginari delle forme binarie cubiche. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 368-373 (1885)].

L¹ 2. (*Vedi* n° 2863).

3115. **L¹ 2 a.**

JUNG (Giuseppe). Intorno alla dimostrazione di un teorema fondamentale della teoria de' poli e polari nella *Geometria projettiva* del prof. L. Cremona. [*G. B.*, v. XIV, pp. 139-140 (1876)].

3116. **L¹ 2 b, L¹ 10, L¹ 11.**

CREMONA (Luigi), BATTAGLINI (Giuseppe). Quistione 25, e soluzione. [*G. B.*, v. I, pp. 319, 369-378 (1863)].

3117. **L¹ 2 c.**

D'OVIDIO (Errico). Dimostrazione d'un teorema del Capitano Faure. [*G. B.*, v. I, pp. 28-29 (1863)].

3118. **L¹ 2 c.**

D'OVIDIO (Errico). Alcune locali. [*G. B.*, v. I, pp. 265-270 (1863)].

3119. **L¹ 2 c.**

PIETROCOLA (Carlo). Sopra alcune proprietà di due triangoli reciproci rispetto ad una conica. [*G. B.*, v. XXV, pp. 183-197 (1887)].

L¹ 3 a. (*Vedi* n° 3059).

3120. **L¹ 3 b.**

BATTAGLINI (Giuseppe), ed X. Quistione 1, e soluzione. [*G. B.*, v. I, pag. 63 (1863); v. II, pp. 30-32, 158-160 (1864)].

3121. **L¹ 3 c, R 2 c.**
CROCCHI (Leopoldo). Sopra gli assi e i raggi vettori nella ellisse. [*G. B.*, v. XII, pp. 375-378 (1874)].

L¹ 7 d. (*Vedi* n° 3135).

3122. **L¹ 8 b.**
AMODEO (Federico). Fasci di omografie binarie e rappresentazione geometrica degli elementi imaginarii. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 363-368 (1888)].

L¹ 9. (*Vedi* n° 3151).

3123. **L¹ 9 a.**
CREMONA (Luigi). Area di un segmento di sezione conica. [*G. B.*, v. I, pp. 360-364 (1863)].

L¹ 9 b. (*Vedi* n° 3485).

3124. **L¹ 9 c.**
PACI (Paolo). Sopra un'applicazione geometrica della teoria delle funzioni ellittiche. [*G. B.*, v. XII, pp. 93-96 (1874)].

L¹ 10. (*Vedi* n° 3116).

3125. **L¹ 10 d.**
CERRUTI (Valentino), PITTARELLI (Giulio), CAPORALI (Ettore). Questione 20 e soluzione. [*G. B.*, v. X, pag. 362 (1872); v. XI, pp. 112-115, 116-120 (1873)].

3126. **L¹ 10 d.**
RETALI (Virginio). Sopra una proprietà focale della parabola. [*G. B.*, v. XXII, pp. 217-220 (1884)].

L¹ 11. (*Vedi* n° 3116).

3127. **L¹ 12, N⁴ 2 h.**
CREMONA (Luigi). Rivista bibliografica. Sulla teoria delle coniche (*). [*G. B.*, v. III, pp. 60-64, 113-120 (1865)].

3128. **L¹ 12 c.**
BATTAGLINI (Giuseppe), JANNI (Vincenzo). Quistione 3, e soluzione. [*G. B.*, v. I, pp. 63, 336-337 (1863)].

3129. **L¹ 12 c.**
FUORTES (Tarquinio). Sulle curve e sulle superficie di 2° ordine, che dividono dati segmenti armonicamente. [*G. B.*, v. X, pp. 98-102 (1872)].

(*) Estratto dagli Annali di Matematica pura ed applicata, v. VI.

3130. **L¹ 15 f.**
CROCCHI (Leopoldo), PITTARELLI (Giulio), CAPORALI (Ettore). Quistione 12 e soluzione. [*G. B.*, v. X, pag. 361 (1872); v. XI, pp. 43, 112-115, 116-120 (1873)].

L¹ 15 f. (*Vedi* n° 3056).

3131. **L¹ 16.**
DEL RE (Alfonso). Oblique e circoli osculatori alle coniche in relazione tra loro ed in relazione con altri elementi geometrici di cui sono casi particolari. [*G. B.*, v. XXII, pp. 75-117 (1884)].

L¹ 16. (*Vedi* nⁱ 3050, 3051, 3052).

3132. **L¹ 16 a, K 7 e.**
CREMONA (Luigi), BATTAGLINI (Giuseppe). Quistione 23, e soluzione. [*G. B.*, v. I, pp. 319, 369-378 (1863)].

3133. **L¹ 16 a.**
DESARGUES, JANNI (Vincenzo), BATTAGLINI (Giuseppe). Quistione 29 e soluzioni. [*G. B.*, v. II, pp. 30, 49-51, 52-57 (1864)].

3134. **L¹ 16 a, L² 14 a, K 9 a α.**
SIACCI (Francesco), CAPORALI (Ettore), PITTARELLI (Giulio). Quistioni 23, 24, 25, 26, 27, 28, e soluzioni. [*G. B.*, v. XI, pp. 121-122, 191-196 (1873); v. XII, pp. 78-89 (1874)].

3135. **L¹ 16 a, L¹ 1 d, L¹ 7 d.**
VERONESE (Giuseppe). Teoremi e costruzioni di geometria proiettiva. [*G. B.*, v. XVII, pp. 172-182 (1879)].

3136. **L¹ 16 a, L¹ 17 e, O 1.**
FAZZARI (Gaetano). Alcuni teoremi di massimi e minimi relativi alle coniche. [*G. B.*, v. XXV, pp. 305-307 (1887)].

L¹ 16 a. (*Vedi* nⁱ 3057, 3167).

3137. **L¹ 16 b.**
GENOCCHI (Angelo), ASCOLI (Giulio). Quistione 61 e soluzione. [*G. B.*, v. V, pp. 122, 378-380 (1867)].

3138. **L¹ 16 b, L¹ 17 e.**
ASCOLI (Giulio). Un teorema di geometria e la soluzione di [*G. B.*, v. V, pp. 378-380 (1867)].

3139. **L^1 17, B 10 d.**
ROMANCE (L.), BATTAGLINI (Giuseppe). Quistioni 19, 20, 21, 22, e soluzioni. [*G. B.*, v. I, pp. 318-319, 369-378 (1863)].

3140. **L^1 17.**
D'OVIDIO (Errico). Problemi sulle coniche. [*G. B.*, v. II, pp. 58-62 (1864)].

3141. **L^1 17.**
BELTRAMI (Eugenio). Alcune formole per la teoria elementare delle coniche. [*G. B.*, v. IX, pp. 341-344 (1871); v. X, pp. 47-48 (1872)].

3142. **L^1 17.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Nota sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle coniche. [*G. B.*, v. XII, pp. 193-200 (1874)].

L^1 17. (*Vedi* n° 3113).

3143. **L^1 17 a.**
CASSANI (Pietro). Sul triangolo conjugato di due coniche. [*G. B.*, v. VIII, pp. 200-201 (1870)].

3144. **L^1 17 a, L^1 18 b.**
MONTESANO (Domenico). Su due teoremi fondamentali di geometria projettiva. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 285-287 (1885)].

3145. **L^1 17 b, L^2 17 c.**
D'OVIDIO (Errico). Sulle linee e superficie di 2° ordine rispetto a cui due date linee o superficie di 2° ordine sono polari reciproche. [*G. B.*, v. X, pp. 313-319 (1872)].

3146. **L^1 17 b, L^1 18 c.**
CROCCHI (Leopoldo). Sopra le coniche polari reciproche nei fasci di coniche. [*G. B.*, v. XIV, pp. 83-92 (1876)].

3147. **L^1 17 d.**
TRUDI (Nicola). Sui teoremi del Poncelet relativi ai poligoni iscritti e circoscritti alle coniche. [*G. B.*, v. I, pp. 81-90, 125-126 (1863)].

3148. **L^1 17 e, L^2 2 g.**
BATTAGLINI (Giuseppe), ed X. Quistioni 14, 15, e soluzioni. [*G. B.*, v. I, pag. 256 (1863); v. II, pp. 30-32, 158-160 (1864)].

3149. **L^1 17 e, L^1 19 d.**
D'OVIDIO (Errico). Nota sopra due teoremi del sig. Mannheim. [*G. B.*, v. VII, pp. 107-111 (1869)].

3150. **L¹ 17 e.**
ANONIMO. Sopra due questioni del Salmon nel Trattato delle coniche. [*G. B.*, v. VII, pp. 254-255 (1869)].

3151. **L¹ 17 e, L¹ 9.**
TANO (Florestano). Un teorema di geometria. [*G. B.*, v. IX, pag. 151 (1871)].

3152. **L¹ 17 e.**
SCHRÖTER (Errico). Teoremi relativi alle coniche iscritte, circoscritte e coniugate. (Traduzione del Dr. Gaetano Fazzari). [*G. B.*, v. XXII, pp. 262-271 (1884)].

3153. **L¹ 17 e.**
FAZZARI (Gaetano). Alcune relazioni fra i semiassi delle coniche. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 198-202 (1885)].

L¹ 17 e. (*Vedi* ni 3136, 3138, 3337).

L¹ 18. (*Vedi* n° 3176).

L¹ 18 b. (*Vedi* n° 3144).

3154. **L¹ 18 c.**
DE' ROSSI (Guido). Sulla locale dei centri delle coniche che toccano due rette e passano per due punti. [*G. B.*, v. VII, pp. 174-175 (1869)].

L¹ 18 c. (*Vedi* n° 3146).

L¹ 19. (*Vedi* n° 3163).

3155. **L¹ 19 d, K 2 d.**
GENOCCHI (Angelo), ASCOLI (Giulio), PADOVA (Ernesto). Quistioni 60, 62, 64, 65 e soluzioni. [*G. B.*, v. V, pp. 122-124, 165-169, 178-181 (1867)].

L¹ 19 d. (*Vedi* n° 3149).

3156. **L¹ 20 c α, M¹ 5 g.**
TRUDI (Nicola), GAMBARDELLA (Filippo), ALLOCATI (Alessandro), RECCHIA (Gaetano), CREMONA (Luigi). Quistioni 8, 9, 10, 11, 12, e soluzioni. [*G. B.*, v. I, pp. 91, 190-193, 254-256, 317-318 (1863)].

L². (*Vedi* n° 3274).

3157. **L² 1, L² 2, L² 3, L² 4, L² 5, L² 6, L² 7, L² 21.**
PITTARELLI (Giulio). Osservazioni sulle quadriche in coordinate di piani. [*G. B.*, v, XIII, pp. 204-225, 298-322 (1875)].

L² 1 a. (*Vedi* n° 3060).

L² 2 g. (*Vedi* n° 3148).

L² 3 a. (*Vedi* n° 2864).

3158. **L² 4 a.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Quistione di Geometria. [*G. B.*, v. V, pag. 192 (1867)].

3159. **L² 4 b.**
BATTAGLINI (Giuseppe), ed X. Quistione 2, e soluzione. [*G. B.*, v. I, pag. 63 (1863); v. II, pp. 30-32, 158-160 (1864)].

L² 5. (*Vedi* n° 3157).

L² 6. (*Vedi* n° 3157).

3160. **L² 6 b.**
BELTRAMI (Eugenio). Soluzione d'un problema relativo alle superficie di second'ordine. [*G. B.*, v. I, pp. 68-73 (1863)].

L² 7. (*Vedi* nⁱ 3157, 3407).

3161. **L² 7 a, R 4 a.**
CAYLEY (Arturo), D'OVIDIO (Errico), TORELLI (Gabriele), BATTAGLINI (Giuseppe). Quistione 45, e soluzioni. [*G. B.*, v. III, pag. 320 (1865); v. IV, pp. 54-64, 93-95 (1866)].

3162. **L² 7 a.**
MOGNI (Antonio). Di una proprietà dell'iperboloide. [*G. B.*, v. IV, pp. 321-326 (1866)].

3163. **L² 10, L¹ 19.**
MAGLIOLI (Fortunato). Sulla teoria delle quadriche omofocali dal punto di vista sintetico. [*G. B.*, v. XVI, pp. 305-340 (1878)].

L² 11 b. (*Vedi* n° 3466).

3164. **L² 11 d.**
LYME RYEW (M.). Sulle linee di curvatura delle superficie di second'ordine. [*G. B.*, v. XI, pp. 111-112 (1873)].

L² 11 d. (*Vedi* n° 3176).

L² 13 b. (*Vedi* n° 3471).

3165. **L² 14 a.**
D'OVIDIO (Errico). Sopra un problema di geometria. [*G. B.*, v. I, pp. 183-186 (1863)].

3166. **L² 14 a, M² 3 h.**
CASSANI (Pietro). La quadrica dei dodici punti e ricerche che le si collegano. [*G. B.*, v. XVII, pp. 202-217 (1879)].

3167. **L² 14 a, L¹ 16 a.**
DEL RE (Alfonso). La quadrica dei dodici punti e la quadrica dei dodici piani. [*G. B.*, v. XXII, pp. 221-235 (1884)].

L² 14 a. (*Vedi* n° 3134).

3168. **L² 17 a, L² 17 b.**
STAMMER (Guillaume). Recherches sur les surfaces du second degré, qui se coupent suivant deux courbes planes, ou qui sont enveloppées par deux cônes communs. [*G. B.*, v. VI, pp. 153-165 (1868)].

L² 17 b. (*Vedi* n° 3168).

L² 17 c. (*Vedi* n° 3145).

3169. **L² 17 d.**
JANNI (Vincenzo). Dei diametri conjugati paralleli nel sistema di due superficie di 2° grado. [*G. B.*, v. I, pp. 223-224, 280-282 (1863)].

3170. **L² 17 h, N¹ 1 i, N¹ 1 j.**
ASCHIERI (Ferdinando). Sopra una corrispondenza di rette fra loro e di punti fra loro. [*G. B.*, v. XIII, pp. 328-336 (1875)].

3171. **L² 18.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Nota sul rapporto anarmonico sezionale e tangenziale delle quadriche. [*G. B.*, v. XII, pp. 266-276 (1874)].

L² 19 c. (*Vedi* n° 3376).

L² 20. (*Vedi* n° 3113).

3172. **L² 21.**
CASSANI (Pietro). Sopra alcune proprietà delle quadriche. [*G. B.*, v. XIV, pp. 146-150 (1876)].

L² 21. (*Vedi* n° 3157).

L² 21 a. (*Vedi* n° 3338).

3173. **M¹ •, V 9.**
RUBINI (Raffaele). Bibliografia. Sulla Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane pel Dr. Luigi Cremona. [*G. B.*, v. I, pp. 93-96 (1863)].

3174. **M¹, M², F, D 3, B 4.**
DE BERARDINIS (G.), FUORTES (Tarquinio). Relazione dei corsi di geometria superiore, e d'analisi superiore nella R. Università di Napoli negli anni 1870-1871. [*G. B.*, v. IX, pp. 233-258 (1871)].

3175. **M¹ 1 a, P 4 α.**
BERTINI (Eugenio). Sulle curve razionali per le quali si possono assegnare arbitrariamente i punti multipli. [*G. B.*, v. XV, pp. 329-335 (1877)].

3176. **M¹ 1 d, L¹ 18, L¹ 7 d, L² 11 d.**
WEYR (Emilio), ISÈ (Ernesto), CROCCHI (Leopoldo), CASSANI (Pietro), RYEW (Lyme). Quistioni 6, 7, 8, 9, e soluzioni. [*G. B.*, v. X, pp. 189, 236-239, 294 (1872); v. XI, pp. 111-112 (1873)].

3177. **M¹ 1 d, M² 1 e.**
PIERI (Mario). Sopra alcuni problemi riguardanti i fasci di curve e di superficie algebriche. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 13-22 (1886)].

3178. **M¹ 1 i.**
ASCOLI (Giulio). Alcuni teoremi sopra le curve piane algebriche. [*G. B.*, v. V, pp. 358-366 (1867)].

3179. **M¹ 2.**
TOGNOLI (Oreste). Le funzioni algebriche studiate geometricamente. [*G. B.*, v. XXII, pp. 308-332 (1884); v. XXIII, pp. 247-262, 345-365 (1885)].

3180. **M¹ 2 a.**
WEYR (Emilio). Intorno alle involuzioni di grado qualunque. [*G. B.*, v. X, pp. 165-169 (1872)].

M¹ 2 a α. (*Vedi* nⁱ 2804, 2838, 2839).

3181. **M¹ 2 a β, B 1 α.**
RETALI (Virginio). Sui sistemi di punti in linea retta. [*G. B.*, v. XXI, pp. 16-18 (1883)].

3182. **M¹ 2 h.**
BERTINI (Eugenio). Nuova dimostrazione del teorema: « Due curve punteggiate projettivamente sono dello stesso genere *p* ». [*G. B.*, v. VII, pp. 105-106 (1869)].

3183. **M¹ 2 h, M³ 1 d.**
TOGNOLI (Oreste). Sulla teorica della involuzione. [*G. B.*, v. XX, pp. 270-286 (1882)].

3184. M[illegible] 3 d.
BELTRAMI (Eugenio). Di alcune [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] algebriche. [G. B., v. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]].

3185. M[illegible] 3 [illegible] a.
SALVATORE-DINI [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] curve algebriche. [G. B., v. [illegible], pp. [illegible] [illegible]].

3186. M[illegible] 4 a, M[illegible] 4 a.
TOGNOLI [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [G. B., v. [illegible], pp. [illegible] [illegible]].

3187. M[illegible] 4 a, M[illegible] 4 a.
TOGNOLI ([illegible]). Sulla [illegible] delle curve [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] di [illegible] e [illegible]. [G. B., v. IX, pp. [illegible] [illegible]].

M[illegible] 4 a. [illegible] x^2 [illegible].

3188. M[illegible] 5.
CREMONA (Luigi). Considerazioni sulle curve piane del terz'ordine, sulle soluzioni delle questioni [illegible] e [illegible]. [G. B., v. [illegible], pp. [illegible] [illegible]].

3189. M[illegible] 5 a.
WEYR (Emilio). Sulle curve piane razionali del terz'ordine. [G. B., v. IX, pp. 145-147 (1871)].

3190. M¹ 5 a, M¹ 6 a, L¹ 1 c, P 4 h.
AMANZIO (Domenico). Alcune proprietà delle curve di 3° e 4° ordine. [G. B., v. XIV, pp. 48-53 (1876)].

3191. M¹ 5 a.
ANELLI (Pompeo). Sopra le curve piane del terz'ordine con un punto doppio. [G. B., v. XVI, pp. 364-376 (1878)].

3192. M¹ 5 a, M¹ 6 a, Q 2.
ZECCA (Giovanni). Sopra una classe di curve razionali. [G. B., v. XXV, pp. 333-359 (1887)].

3193. M¹ 5 a.
CERTO (Luigi). Sulle forme di terzo grado generate da due forme elementari proiettive di primo e di secondo grado di un piano o di una stella. [G. B., v. XXVI, pp. 41-45 (1888)].

3194. M¹ 5 a, B 7 f.
TORELLI (Gabriele). Su qualche proprietà delle curve piane del terz'ordine fornite d'un punto doppio. [G. B., v. XXVI, pp. 172-177 (1888)].

M¹ 5 a. (*Vedi* n° 2804).

3195. M¹ 5 b.
INTRIGILA (Carmelo). Studio geometrico sull'ipocicloide tricuspide. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 263-284 (1885)].

M¹ 5 b. (*Vedi* n° 3207).

3196. M¹ 5 c α.
WEYR (Emilio). Alcuni teoremi intorno alla « *focale à noeud* ». [*G. B.*, v. IX, pp. 259-261 (1871)].

3197. M¹ 5 d.
TOGNOLI (Oreste). Sopra un modo di generazione delle curve piane di terz'ordine. [*G. B.*, v. XI, pp. 378-380 (1873)].

3198. M¹ 5 e δ, M¹ 5 i β.
CREMONA (Luigi), D'OVIDIO (Errico), SALVATORE-DINO (Nicola). Quistioni 41, 42, e soluzioni. [*G. B.*, v. II, pp. 256, 317-319, 319-320 (1864)].

3199. M¹ 5 e δ.
TORELLI (Gabriele). Un teorema sulle curve del 3° ordine. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 327-328 (1888)].

M¹ 5 g. (*Vedi* n° 3156).

3200. M¹ 5 g α, P 4 b, P 4 d, P 4 f.
MARTINETTI (Vittorio). Ricerche sulle curve piane del terzo ordine. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 37-47 (1885)].

M¹ 5 i β. (*Vedi* n° 3198).

3201. M¹ 5 i γ.
SALVATORE-DINO (Nicola). Sulle curve di terzo grado. [*G. B.*, v. I, pp. 334-336 (1863)].

3202. M¹ 5 i γ.
D'OVIDIO (Errico). Sulle curve del 3° ordine circoscritte ad un quadrilatero completo. [*G. B.*, v. X, pp. 16-32 (1872)].

3203. M¹ 5 h.
SYLVESTER (James Joseph), CREMONA (Luigi), BATTAGLINI (Giuseppe). Quistione 27, e soluzioni. [*G. B.*, v. II, pp. 29, 78-85, 86-91 (1864)].

3204. M¹ 5 h.
BRIOSCHI (Francesco), D'OVIDIO (Errico), SALVATORE-DINO (Nicola). Quistione 40, e soluzioni. [*G. B.*, v. II, pp. 256, 317-319, 319-320 (1864)].

3205. **M¹ 5 j.**
SYLVESTER (James Joseph), CREMONA (Luigi), BATTAGLINI (Giuseppe), D'OVIDIO (Errico), SALVATORE-DINO (Nicola). Quistione 26, e soluzioni. [*G. B.*, v. II, pp. 29, 78-85, 86-91, 104-109 (1864)].

3206. **M¹ 5 k.**
SALVATORE-DINO (Nicola). Sulle curve di terzo grado. [*G. B.*, v. I, pp. 187-190 (1863)].

3207. **M¹ 5 k, M¹ 6 b, M¹ 5 b.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sopra una curva di terza classe e di quart'ordine. [*G. B.*, v. IV, pp. 214-222 (1866)].

M¹ 5 k. (*Vedi* n° 3209).

M¹ 6 a. (*Vedi* n° 3190).

M¹ 6 b. (*Vedi* ni 3207, 3261).

3208. **M¹ 6 b α.**
CHINI (Mineo). Una proprietà delle lemniscate di Bernoulli. [*G. B.*, v. XXV, pp. 51-53 (1887)].

3209. **M¹ 6 h, M¹ 5 k, F 8 g.**
PITTARELLI (Giulio). Le lumache di Pascal.—Nota I, Nota II. [*G. B.*, v. XXI, pp. 145-168, 173-212 (1883)].

3210. **M¹ 6 l.**
SARDI (Ciro). Nota su una rete di biquadratiche. [*G. B.*, v. VI, pp. 217-238 (1868)].

M¹ 6 l. (*Vedi* n° 2853).

3211. **M¹ 7 a.**
FRATTINI (Giovanni). Equazione di certe curve del quint'ordine. [*G. B.*, v. XVI, pag. 377 (1878)].

3212. **M¹ 8 a.**
CREMONA (Luigi), ARMENANTE (Angelo). Quistioni 33, 34, e soluzioni. [*G. B.*, v. II, pag. 91, (1864); v. III, pp. 81, 315-320 (1865)].

3213. **M¹ 8 d.**
BASSANI (Anselmo). Sulle curve $r^m \cos m\theta = a^m$. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 23-43 (1886)].

3214. **M¹ 8 g.**
BURALI-FORTI (Cesare). Sopra un sistema di curve che dividono in n parti

eguali gli archi di circolo che passano per due punti fissi. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 153-163 (1889)].

M². (*Vedi* n° 3174).

3215. **M² 1.**

TOGNOLI (Oreste). Sopra un'estensione di proprietà spettanti a curve algebriche piane di un ordine qualunque, alle superficie algebriche di qualunque grado.—Dimostrazione d'un teorema di geometria. [*G. B.*, v. VIII, pp. 166-199 (1870); v. IX, pp. 366-370 (1871)].

3216. **M² 1 a.**

ARZELÀ (Cesare). Sopra alcune applicazioni di una formola data da Jacobi. [*G. B.*, v. IX, pp. 32-37 (1871)].

3217. **M² 1 a, M² 1 e.**

TOGNOLI (Oreste). Osservazioni geometriche. [*G. B.*, v. IX, pp. 68-75, 192 (1871); v. X, pp. 147-148 (1872)].

3218. **M² 1 a.**

PADOVA (Ernesto). Sulla generazione delle superficie mediante reti projettive. [*G. B.*, v. IX, pp. 148-150 (1871)].

3219. **M² 1 e.**

TOGNOLI (Oreste). Nota sul numero delle superficie di una rete, che hanno un contatto tripunto colla curva d'intersezione di due superficie algebriche. [*G. B.*, v. IX, pp. 188-192 (1871)].

M² 1 e. (*Vedi* nⁱ 3177, 3217, 3220).

3220. **M² 2 c, M² 1 e.**

RINDI (Scipione). Alcune proprietà delle superficie e dei sistemi di superficie. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 94-105 (1886)].

3221. **M² 3 a.**

NICODEMI (Rubino). Intorno alle superficie gobbe di 3° grado. [*G. B.*, v. XXI, pp. 270-274 (1883)].

3222. **M² 3 b.**

CASSANI (Pietro). Intorno alla superficie del 3° ordine. [*G. B.*, v. XXII, pp. 51-61 (1884)].

M² 3 h. (*Vedi* n° 3166).

M² 4 d. (*Vedi* nⁱ 3241, 3356).

3223. **M² 4 i.**

PITTARELLI (Giulio). Intorno ad una quistione proposta da Faure. (*Nouvelles Annales*, gennaio 1874). [*G. B.*, v. XII, pp. 176-178 (1874)].

3224. M² 4 i δ.
ALLOCATI (Alessandro). Dimostrazione di un teorema di Villarceau. [G. B., v. I, pp. 284-285 (1863)].

3225. M² 4 i δ.
FUORTES (Tarquinio). Sulla curva d'intersezione della sfera col toro, e sopra una notevole proprietà di quest'ultima superficie. [G. B., v. XII, pp. 146-147 (1874)].

3226. M² 4 i δ.
FUORTES (Tarquinio). Le sezioni piane nel toro. [G. B., v. X, pag. 97 (1872).

M² 4 l. (*Vedi* n° 3356).

3227. M² 4 m.
DEL RE (Alfonso), BOSI (Luigi). Quistione 67 e soluzione. [G. B., v. XXV, pag. 179 (1887); v. XXVII, pp. 164-167 (1889)].

M² 6. (*Vedi* ni 3229, 3230).

M² 7 a. (*Vedi* n° 3233).

3228. M² 7 b.
ASCHIERI (Ferdinando). Sopra una superficie gobba dell'ottavo grado e di genere zero. Applicazione dei teoremi dati sui sistemi di rette che passano per una retta fissa. [G. B., v. XII, pp. 129-135 (1874)].

3229. M² 7 c, M² 6.
SALVATORE-DINO (Nicola). Sulla sviluppabile di 5ª ordine. [G. B., v. III, pp. 100-107, 133-142 (1865)].

3230. M² 7 c, M² 6.
D'OVIDIO (Errico). Dimostrazione di alcuni teoremi sulle superficie sviluppabili di 5° ordine enunciati dal prof. Cremona. [G. B., v. III, pp. 107-113, 184-189, 214-218 (1865)].

M³ 1. (*Vedi* n° 3350).

3231. M³ 1 c.
CANTONE (Andrea). Teorema sulle curve gobbe. [G. B., v. XXV, pp. 303-304 (1887)].

M³ 1 d. (*Vedi* n° 3182).

3232. M³ 4 a.
WEYR (Emilio). Intorno alle curve gobbe razionali. [G. B., v. IX, pp. 217-222 (1871)].

3233. **M³ 4 a, M² 7 a.**
TOGNOLI (Oreste). Alcune considerazioni sulla geometria delle superficie e curve gobbe di genere zero. [*G. B.*, v. XI, pp. 180-191 (1873)].

3234. **M³ 4 a.**
TOGNOLI (Oreste). Sulle curve gobbe razionali. [*G. B.*, v. XII, pp. 220-228 (1874)].

M³ 4 a. (*Vedi* nⁱ 2804, 3186, 3187).

3235. **M³ 5.**
CREMONA (Luigi). Un teorema sulle cubiche gobbe [*G. B.*, v. I, pp. 278-280 (1863)].

3236. **M³ 5.**
CREMONA (Luigi). Sulla projezione iperboloidica di una cubica gobba (*). [*G. B.*, v. II, pp. 122-126 (1864)].

3237. **M³ 5, M³ 5 h α.**
CREMONA (Luigi). Nuove ricerche di geometria pura sulle cubiche gobbe, ed in ispecie sulla parabola gobba (**). [*G. B.*, v. II, pp. 202-210 (1864)].

3238. **M³ 5, B 7 f.**
PITTARELLI (Giulio). La cubica gobba e le forme binarie quadratiche e cubiche. [*G. B.*, v. XVII, pp. 260-309 (1879)].

3239. **M³ 5, B 7 f.**
D'OVIDIO (Errico). Studio sulle cubiche gobbe mediante la notazione simbolica delle forme binarie (***). [*G. B.*, v. XVII, pp. 310-338 (1879)].

M³ 5. (*Vedi* n° 2804).

3240. **M³ 5 f.**
CANTONE (Andrea). Un teorema sopra la cubica gobba. [*G. B.*, v. XXV, pp. 42-44, 182 (1887)].

M³ 5 h α. (*Vedi* n° 3237).

3241. **M³ 6 a, M² 4 d.**
ARMENANTE (Angelo). Sulle curve gobbe razionali del quarto ordine. [*G. B.*, v. XI, pp. 221-232 (1873); v. XII, pp. 250-265 (1874)].

(*) Estratta dagli Annali di Matem. pura ed applicata.

(**) Estratto dalle memorie dell'Acc. delle sc. di Bologna, s. II, t. III.

(***) Questo scritto è un rapido sunto di un lavoro dello stesso titolo presentato all'Accademia delle Scienze di Torino il 9 Marzo 1879.

M³ 6 a. (*Vedi* nⁱ 2804, 3192).

M³ 6 b. (*Vedi* n° 3356).

3242. **M⁴ b, R 4 b.**
PADELLETTI (Dino). Nota sulla catenaria. [*G. B.*, v. XIX. pp. 228-332 (1881)].

3243. **M⁴ m.**
RUIZ DE CARDENAS (Achille). Intorno all'epicicloide sferica. [*G. B.*, v. XII, pp. 313-319 (1874)].

N¹. (*Vedi* n° 3493).

N¹ 1. (*Vedi* nⁱ 3389, 3390, 3398, 3400, 3408, 3409).

3244. **N¹ 1, N² 1.**
JANNI (Giuseppe). Esposizione della nuova geometria di P l u e c k e r. [*G. B.*, v. VIII, pp. 302-326 (1870)].

3245. **N¹ 1 a.**
TOGNOLI (Oreste). Intorno ad alcune questioni generali sulla teoria dei complessi risolute col metodo geometrico puro. [*G. B.*, v. IX, pp. 19-31 (1871)].

N¹ 1 a. (*Vedi* n° 3252).

3246. **N¹ 1 b.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Intorno ai sistemi di rette di 1° grado. [*G. B.*, v. VI, pp. 24-36 (1868)].

3247. **N¹ 1 b.**
ASCHIERI (Ferdinando). Sopra i sistemi di rette. [*G. B.*, v. X, pp. 343-346 (1872)].

N¹ 1 b. (*Vedi* n° 3255).

3248. **N¹ 1 c.**
ASCHIERI (Ferdinando). Sui sistemi di rette nello spazio. [*G. B.*, v. XI, pp. 107-109, 246-249, 340-348 (1873); v. XII, pp. 15-21 (1874)].

3249. **N¹ 1 e.**
BERTINI (Eugenio). Sui complessi di 2° grado. [*G. B.*, v. XVII, pp. 1-8 (1879)].

3250. **N¹ 1 h.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sui complessi di secondo grado. [*G. B.*, v. XVIII, pp. 1-14 (1880)].

N¹ 1 h. (*Vedi* n° 3356).

3251. **N¹ 1 i.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Intorno ai sistemi di rette di 2° grado. [*G. B.*, v. VI, pp. 239-258 (1868); v. VII, pp. 55-75 (1869)].

3252. **N¹ 1 i.**
ASCHIERI (Ferdinando). Sopra un complesso di 2° grado. [*G. B.*, v. VIII, pp. 35-37 (1870)].

3253. **N¹ 1 i, N¹ 1 a.**
ASCHIERI (Ferdinando). Sopra un complesso del 2° grado. Generazione geometrica dei complessi del 1° grado. [*G. B.*, v. VIII, pp. 229-234 (1870)].

N¹ 1 i. (*Vedi* n¹ 3170, 3356).

3254. **N¹ 1 j.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Intorno ai sistemi di rette di grado qualunque. [*G. B.*, v. X, pp. 55-75 (1872)].

N¹ 1 j. (*Vedi* n° 3170).

N¹ 3 a α. (*Vedi* n° 3356).

N¹ 1. (*Vedi* n° 3244).

3255. **N² 1 c, N¹ 1 b.**
ASCHIERI (Ferdinando). Nozioni preliminari per la geometria projettiva dello spazio rigato. Nota I. [*G. B.*, v. XVI, pp. 346-363 (1878)].

N² 1 c. (*Vedi* n° 3376).

3256. **N³ b.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sui connessi ternarii di 1ª ordine e di 1ª classe. [*G. B.*, v. XX, pp. 230-248 (1882)].

3257. **N³ d.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sui connessi ternarii di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione semplice. [*G. B.*, v. XIX, pp. 316-327 (1881)].

3258. **N³ d.**
AMODEO (Federico). Sopra un particolare connesso (2, 2) con due punti singolari e due rette singolari. (Memoria geometrica che fa seguito a quella sulle coniche bitangenti a due coniche). [*G. B.*, v. XXV, pp. 321-332 (1887)].

3259. **N³ d.**
PANNELLI (M.): Sui connessi ternari di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione doppia. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 1-20 (1888)].

3260. **N⁴ 1 a, N⁴ 1 b.**
BURALI-FORTI (Cesare). Sui sistemi di coniche. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 309-333 (1886)].

N⁴ 1 b. (*Vedi* n° 3260).

3261. **N⁴ 1 b, M¹ 6 b.**
HIRST (T. A.,) ARMENANTE (Angelo). Quistione 35, e soluzione. [*G. B.*, v. II, pag. 160 (1864); v. III, pp. 47-50 (1865)].

3262. **N⁴ 1 b.**
INTRIGILA (Carmelo), LAUDIERO (Francesco). Dimostrazione d'un teorema di Faure. [*G. B.*, v. XIX, pp. 245-257 (1881)].

3263. **N⁴ 1 b α.**
AMODEO (Federico). Sulle coniche bitangenti a due coniche. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 346-353 (1886)].

3264. **N⁴ 1 d.**
BURALI-FORTI (Cesare). Sui sistemi *i* volte infiniti di quadriche. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 334-345 (1886)].

3265. **N⁴ 1 e.**
JONQUIÈRES (E. de). Corrispondenza. [*G. B.*, v. I, pag. 128 (1863)].

3266. **N⁴ 1 e.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle serie di curve di indice qualunque. [*G. B.*, v. I, pp. 170-174 (1863)].

3267. **N⁴ 1 e.**
JONQUIÈRES (E. de). Théorèmes fondamentaux sur les séries de courbes et de surfaces d'ordre quelconque. [*G. B.*, v. IV, pp. 45-53, 212-213 (1866)].

3268. **N⁴ 1 e.**
JONQUIÈRES (E. de). Note sur les séries de courbes à double courbure. [*G. B.*, v. IV, pp. 210-211 (1866)].

3269. **N⁴ 1 e.**
ASCOLI (Giulio). Sopra un teorema di Jonquières. [*G. B.*, v. V, pag. 377 (1867)].

3270. **N⁴ 1 e.**
TOGNOLI (Oreste). Sui sistemi di curve piane. [*G. B.*, v. XIII, pp. 359-362 (1875)].

3271. **N⁴ 1 e.**
MURER (Vittorio). Sulle serie razionali di superficie algebriche. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 106-123 (1886)].

3272. **N⁴ 1 e.**
MURER (Vittorio). Sulle serie di superficie d'indice 1 e 2. [*G. B.*, v. XXV, pp. 363-366 (1887)].

3273. **N⁴ 1 e.**
MURER (Vittorio). Le serie algebriche di superficie ad indice 3. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 178-180 (1888)].

3274. **N⁴ 2, L².**
CREMONA (Luigi), RAJOLA (Luigi). Quistione 44, e soluzione. [*G. B.*, v. III, pp. 64, 81, 149 (1865); v. V, pp. 121-122, 162 (1867)].

3275. **N⁴ 2 h.**
CREMONA (Luigi). Sulla teoria delle coniche. [*G. B.*, v. I, pp. 225-226 (1863); v. II, pp. 17-20, 192 (1864)].

N⁴ 2 h. (*Vedi* n° 3127).

O 1. (*Vedi* n° 3136).

3276. **O 2 a.**
CROCCHI (Leopoldo). Teorema di Geometria. [*G. B.*, v. X, pp. 302-303 (1872)].

3277. **O 2 a.**
RETALI (Virginio), MINOZZI (Achille). Quistioni 30, 31, 32, 33, 34, e soluzioni. [*G. B.*, v. XII, pag. 338 (1874); v. XIV, pp. 93-96 (1876)].

3278. **O 2 a, O 5 a, O 5 b.**
DAINELLI (Ugo). Relazione fra l'area e il perimetro, fra il volume e la superficie, fra i momenti, fra le coordinate dei centri di gravità per gli spazi limitati da linee e superficie che hanno l'equidistante della loro stessa natura. [*G. B.*, v. XVI, pp. 279-297 (1878)].

O 2 a. (*Vedi* n° 3437).

O 2 c δ. (*Vedi* n° 2953).

3279. **O 2 d.**
RETALI (Virginio). Sui centri di gravità di alcune curve piane. [*G. B.*, v. XII, pp. 326-337 (1874)].

3280. **O 2 f.**
CERRUTI (Valentino), CAPORALI (Ettore). Questione 19 e soluzione. [*G. B.*, v. X, pag. 362 (1872); v. XI, pp. 116-120 (1873)].

32[illegible]. [illegible]

[illegible]

32[illegible]. [illegible]

[illegible] (G. B., v. [illegible], pp. [illegible] (1873)).

32[illegible]. [illegible]

FAIS (Antonio). [illegible] (G. B., v. [illegible], pp. [illegible] (187[illegible])).

[illegible] (*Vedi* n° [illegible]).

32[illegible]. **[illegible]**

PADOVA (Ernesto). [illegible] (G. B., v. [illegible], pp. [illegible] (18[illegible])).

32[illegible]. **[illegible]**

BASSANI (Annibale). [illegible] curve piane. (G. B., v. [illegible], pp. [illegible] (188[illegible])).

32[illegible]. **O 2 g.**

BASSANI (Annibale). Curve piane [illegible]. (G. B., v. XX[illegible], pp. [illegible] (188[illegible])).

32[illegible]. **O 2.**

FAIS (Antonio). Nota intorno ad alcune formole e proprietà delle curve gobbe. (G. B., v. [illegible], pp. [illegible] (18[illegible])).

32[illegible]. **O 2.**

PIRONDINI (Geminiano). Sulle linee a doppia curvatura. (G. B., v. XXVI, pp. [illegible] (188[illegible])).

O 2. (*Vedi* n° 3315).

3289. **O 3 a, O 3 b.**

BELTRAMI (Eugenio). Di una proprietà delle linee a doppia curvatura. (G. B., v. V, pp. 21-23 (1867)).

3290. **O 3 a, O 3 b.**

CHELINI (Domenico). Nota sul teorema (sulle curve a doppia curvatura dato dal Prof. Beltrami) a pag. 21 del vol. V. (G. B., v. V, pp. 190-191 (1867)).

O 3 b. (*Vedi* ni 3289, 3290, 3323).

O 3 d. (*Vedi* n° 3386).

O 3 f. (*Vedi* n° 3296).

3291. **O 3 g, O 2 i.**
PIRONDINI (Geminiano). Sulle curve osculatrici. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 257-302, 380 (1888)].

3292. **O 3 i, O 3 j.**
BIANCHI (Luigi). Sulle curve a doppia curvatura. [*G. B.*, v. XXI, pp. 222-233 (1883)].

O 3 j. (*Vedi* ni 3297, 3312, 3343).

3293. **O 3 k.**
CESÀRO (Ernesto). A proposito d'un problema sulle eliche. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 46-48 (1886)].

O 3 k. (*Vedi* n° 3309).

3294. **O 4.**
PIRONDINI (Geminiano). Sulle superficie rigate. [*G. B.*, v. XXV, pp. 25-41, 115-154 (1887)].

O 4 c. (*Vedi* n° 3296).

3295. **O 4 d.**
DINI (Ulisse). Di alcune proprietà delle superficie rigate. [*G. B.*, v. III, pp. 281-297 (1865)].

3296. **O 4 d, O 4 c, O 3 f, O 4 h.**
CIANI (Edgardo). Le superficie rigate inerenti a una linea a doppia curvatura. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 233-264 (1889)].

O 4 d. (*Vedi* n° 3312).

3297. **O 4 g α, O 3 j.**
RAZZABONI (Amilcare). Sopra alcune superficie gobbe applicabili. [*G. B.*, t. XXI, pp. 92-109 (1883)].

O 4 g α. (*Vedi* n° 3312).

3298. **O 4 h, O 6 f.**
DINI (Ulisse). Sulle superficie gobbe, che possono essere rappresentate da un'equazione data a derivate parziali del second'ordine, e applicazioni alla ricerca di quelle, i cui raggi di curvatura ρ, ρ' verificano una delle relazioni

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=2m,\quad \rho=m,\quad \rho+\rho'=2m,\quad \rho-\rho'=2m,$$

essendo m una costante. [*G. B.*, v. III, pp. 321-337 (1865)].

3299. **O 4 h.**

DINI (Ulisse). Sulle superficie gobbe, che soddisfano a date equazioni alle derivate parziali del second'ordine. [*G. B.*, v. IV, pp. 305-318 (1866)].

O 4 h. (*Vedi* ni 3296, 3309, 3312).

3300. **O 5, O 6, O 7.**

BELTRAMI (Eugenio). Ricerche di analisi applicata alla geometria. [*G. B.*, v. II, pp. 267-282, 297-306, 331-339, 355-375 (1864); v. III, pp. 15-22, 33-41, 82-91, 228-240, 311-314 (1865)].

3301. **O 5.**

DINI (Ulisse). Sulla teoria delle superficie. [*G. B.*, v. III, pp. 65-81 (1865)].

O 5. (*Vedi* n° 3284).

O 5 a. (*Vedi* n° 3278).

3302. **O 5 b.**

TORELLI (Gabriele). Il teorema di Viviani sulla pseudosfera. [*G. B.*, v. X, pag. 128 (1872)].

3303. **O 5 b.**

CROCCHI (Leopoldo). Analogie dell'enunciato del Viviani. [*G. B.*, v. XIII, pp. 170-174 (1875)].

3304. **O 5 b.**

BORLETTI (Francesco). Area delle superficie curve. [*G. B.*, v. XXII, pp. 207-210 (1884)].

O 5 b. (*Vedi* n° 3278).

3305. **O 5 e.**

BELTRAMI (Eugenio). Dimostrazione di due formole del sig. Bonnet. [*G. B.*, v. IV, pp. 123-127 (1866)].

3306. **O 5 g α, O 6 r γ.**

PIRONDINI (Geminiano). Sulle linee di curvatura e sulle superficie che ammettono una evoluta comune. [*G. B.*, v. XXII, pp. 272-303, 377 (1884)].

3307. **O 5 i, O 6 a, O 6 p.**

NANNEI (Errico). Le superficie ipercicliche. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 201-233 (1888)].

3308. **O 5 i α.**

PIRONDINI (Geminiano). Sulle superficie le cui linee di curvatura d'un sistema sono piane. [*G. B.*, v. XXII, pp. 118-129 (1884)].

3309. **O 5 i α, O 4 h, O 3 k, O 6 a.**
PIRONDINI (Geminiano). Rettifica di un teorema e dimostrazione di a'cuni teoremi geometrici. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 222-229 (1885)].

O 5 i α. (*Vedi* n° 3312).

3310. **O 5 i β.**
CHINI (Mineo). Sopra una c'asse di superficie. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 265-273 (1889)].

3311. **O 5 m, O 6 h.**
FRATTINI (Giovanni). Alcune formole spettanti alla teoria infinitesimale delle superficie. [*G. B.*, v. XIII, pp. 161-167 (1875)].

3312. **O 5 m, O 3 j, O 4 d, O 4 g α, O 4 h, O 5 i α.**
PIRONDINI (Geminiano). Studi geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 288-331 (1885)].

O 5 m. (*Vedi* n° 2969).

3313. **O 5 n.**
DINA (Carlo). Sopra una curva particolare giacente sopra una superficie in generale. [*G. B.*, v. XIX, pp. 298-310 (1881)].

O 6. (*Vedi* n° 3300).

3314. **O 6 a.**
BIANCHI (Luigi). Ricerche sulle superficie elicoidali. [*G. B.*, v. XVII, pp. 9-39 (1879)].

O 6 a. (*Vedi* n[i] 3307, 3309).

3315. **O 6 e, O 8.**
PIRONDINI (Geminiano). Sopra alcune superficie e curve. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 352-362 (1888)].

O 6 f. (*Vedi* n[i] 3298, 3373).

3316. **O 6 g.**
DINI (Ulisse). Sulle superficie di curvatura costante. [*G. B.*, v. III, pp. 241-256 (1865)].

3317. **O 6 g.**
BELTRAMI (Eugenio). Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche. [*G. B.*, v. X, pp. 147-159 (1872)].

3318. **O 6 g.**

BIANCHI (Luigi). Sulle superficie a curvatura costante positiva. [*G. B.*, v. XX, pp. 287-292 (1882)].

3319. **O 6 g, O 6 k.**

CHINI (Mineo). Sulle superficie a curvatura media costante. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 107-123 (1889)].

3320. **O 6 h.**

PINCHERLE (Salvatore). Nota sulle superficie d'area minima. [*G. B.*, v. XIV, pp. 75-82 (1876)].

3321. **O 6 h.**

BIANCHI (Luigi). Sopra una proprietà caratteristica delle superficie ad area minima. [*G. B.*, v. XXII, pp. 374-377 (1884)].

O 6 h. (*Vedi* n° 3311).

3322. **O 6 k.**

DINI (Ulisse). Sull'equazione differenziale delle superficie applicabili su di una superficie data. [*G. B.*, v. II, pp. 282-288 (1864)].

3323. **O 6 k, O 3 b.**

DINI (Ulisse). Sulle superficie gobbe applicabili su quelle di rivoluzione, e su alcune proprietà delle superficie gobbe delle normali principali di una curva. [*G. B.*, v. IV, pp. 298-304 (1866)].

3324. **O 6 k.**

BIANCHI (Luigi). Sopra la deformazione d'una classe di superficie. [*G. B.*, v. XVI, pp. 267-269 (1878)].

O 6 k. (*Vedi* n° 3319).

3325. **O 6 p.**

BIANCHI (Luigi). Sopra alcune classi di sistemi tripli ciclici di superficie ortogonali. [*G. B.*, v. XXI, pp. 275-292 (1883)].

3326. **O 6 p.**

BIANCHI (Luigi). Sui sistemi tripli ciclici di superficie ortogonali. Nota II. [*G. B.*, v. XXII, pp. 333-373 (1884)].

O 6 p. (*Vedi* n[i] 3307, 3328).

3327. **O 6 q.**

FRATTINI (Giovanni). Sulle coordinate curvilinee. [*G. B.*, v. X, pag. 235 (1872)].

3328. **O 6 r δ, O 6 p, Q 2.**

PIERI (Mario). Intorno ad un teorema dei signori Betti e Weingarten. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 290-308 (1886)].

O 6 r δ. (*Vedi* n° 3306).

O 7. (*Vedi* n° 3300).

3329. **O 8 a.**

MINOZZI (Achille). Nota sul movimento d'una curva sopra un'altra ad essa eguale. [*G. B.*, v. XIV, pp. 190-192 (1876)].

O 8 d. (*Vedi* n° 3393).

3330. **P 1.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Intorno ai sistemi di 2° ordine e di 2ª classe. [*G. B.*, v. I, pp. 287-290 (1863)].

P 1. (*Vedi* n° 2865).

P 1 a. (*Vedi* n° 3069).

3331. **P 1 b.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle forme geometriche di 2ª specie. [*G. B.*, v. III, pp. 298-310 (1865); v. IV, pp. 96-122, 174-186 (1866)].

3332. **P 1 b.**

MOLLAME (Vincenzo). Sulla trasformazione continua d'una figura piana, la quale resta sempre omografica a sè stessa, e di cui quattro punti qualunque (tre dei quali non siano per dritto) descrivono quattro linee omografiche date. [*G. B.*, v. IX, pp. 269-279 (1871)].

3333. **P 1 b, P 1 c.**

LORIA (Gino). Sulle corrispondenze projettive fra due piani e fra due spazii. [*G. B.*, v. XXII, pp. 1-16, 117 (1884)].

3334. **P 1 b.**

AMODEO (Federico). Sugli elementi uniti reali delle omografie ternarie. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 40-47 (1889)].

P 1 b α. (*Vedi* n° 3339).

3335. **P 1 c.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Quistione (*). [*G. B.*, v. IX, pag. 179 (1871)].

(*) Cfr. n° 3332.

P 1 c. (*Vedi* n° 3333).

3336. **P 1 d.**

CASSANI (Pietro). Studio elementare intorno all'omologia. [*G. B.*, v. III, pag. 150 (1865)].

3337. **P 1 d, L^1 17 e.**

LAUDIERO (Francesco). Sull'omologia di due coniche situate in uno stesso piano. [*G. B.*, v. XXI, pp. 217-222 (1883)].

P 1 d. (*Vedi* n° 3100).

P 1 f. (*Vedi* n° 3069).

3338. **P 2 a, L^1 21 a.**

SEGRE (Corrado). Su alcune proprietà metriche delle correlazioni. [*G. B.*, v. XXV, pp. 20-24 (1887)].

3339. **P 2 a, P 1 b α.**

DEL RE (Alfonso). Quistione 80 e soluzione. [*G. B.*, v. XXV, pag. 308 (1887); v. XXVII, pp. 340-341 (1889)].

P 2 a. (*Vedi* n^i 2863, 2864, 3383).

P 2 b. (*Vedi* n° 2863).

P 2 c. (*Vedi* n° 2864).

3340. **P 3 a, R 1 b α.**

FORMENTI (Carlo). Movimento delle figure che si mantengono simili a sè stesse. [*G. B.*, v. XVII, pp. 232-243 (1879)].

3341. **P 3 b.**

BIANCHI (Luigi). Sulla trasformazione per raggi vettori reciproci nel piano e nello spazio. [*G. B.*, v. XVII, pp. 40-42 (1879)].

3342. **P 3 b.**

LEVI (Donato). Alcune proprietà della superficie di rotazione avente per linea meridiana una lemniscata. [*G. B.*, v. XXI, pp. 379-380 (1883)].

3343. **P 3 b, O 3 j.**

PIRONDINI (Geminiano). Sulla trasformazione per raggi vettori reciproci. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 168-223 (1889)].

3344. **P 3 c α.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle divisioni omografiche immaginarie. [*G. B.*, v. II, pp. 142-151 (1864)].

P 3 c α. (*Vedi* n° 3363).

3345. **P 4 a, P 4 g.**
BIANCHI (Luigi). Nota sulle trasformazioni univoche nel piano e nello spazio. [*G. B.*, v. XVI, pp. 263-266 (1878)].

3346. **P 4 b.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sulla dipendenza duplo-anarmonica. [*G. B.*, v. I, pp. 321-328 (1863)].

3347. **P 4 b.**
HIRST (T. A.). Sull'inversione quadrica delle curve piane (*). [*G. B.*, v. IV, pp. 278-293 (1866)].

P 4 b. (*Vedi* n[i] 3190, 3200).

3348. **P 4 c.**
CREMONA (Luigi). Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. Nota I. Nota II (**). [*G. B.*, v. I, pp. 305-311 (1863); v. III, pp. 269-280, 363-376 (1865)].

3349. **P 4 c.**
JUNG (Giuseppe), ARMENANTE (Angelo). Sulle trasformazioni birazionali univoche, e sulle curve normale e subnormale del genere p. [*G. B.*, v. VII, pp. 235-253 (1869)].

P 4 c. (*Vedi* n[i] 3006, 3175).

3350. **P 4 d, M³ 1.**
JONQUIÈRES (E. de). Mémoire sur les figures isographiques et sur un mode uniforme de génération des courbes à double courbure d'un ordre quelconque au moyen de deux faisceaux correspondants de droites (***). [*G. B.*, v. XXIII, pp. 48-75 (1885)].

P 4 d. (*Vedi* n° 3200).

3351. **P 4 f, P 4 g.**
CROCCHI (Leopoldo). Proprietà derivate dalle curve e superficie arguisiane. [*G. B.*, v. XII, pp. 378-380 (1874)].

P 4 f. (*Vedi* n° 3200).

(*) Estratto dagli Annali di Matematica pura ed applicata, v. VII.

(**) Estratte rispettivamente dai t. II e V, s. 2, delle Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna.

(***) Avec une lettre adressée à M. le Dr. G. B. Guccia.

3352. [illegible]

DE PAOLIS [illegible] (1875)].

[illegible] 3351.

[illegible] 3352.

3353. [illegible]

[illegible] (1871).

3354. P 5 1

[illegible] (1884).

3355. P 5 a

[illegible] ARMENANTE [illegible] (1864); v. II [illegible].

3356. [illegible]

SEGRE (Corrado). Su una trasformazione [illegible] sione nello studio dei complessi quadratici [illegible] lineare di complessi [illegible] 178 (1885)].

3357. P 6 1

TOGNOLI (Oreste). Sulla corrispondenza multipla [illegible] sioni. [G. B., v. X, pp. 1-25, 141-146 (1872)].

3358. P 6 g 2

CERTO (Luigi). Lo spazio delle omologie [illegible] con lo spazio delle coniche dello stesso piano [illegible] (1882)].

3359. Q 1

BATTAGLINI (Giuseppe). Nota sui circoli [illegible] v. XII, pp. 213-219 (1874)].

3360. Q 1

BATTAGLINI (Giuseppe). Sulla geometria [illegible] 311 (1874); v. XIII, pp. 49 [illegible] (1875); v. XIV, pp. [illegible] (1876)].

3361. **Q 1.**
D'OVIDIO (Errico). Sopra alcuni luoghi ed inviluppi di 1° e 2° grado in geometria proiettiva. [*G. B.*, v. XIII, pp. 363-379 (1875)].

3362. **Q 1.**
D'OVIDIO (Errico). Nota sulle proiezioni ortogonali nella geometria metrico-proiettiva. [*G. B.*, v. XIV, pp. 298-305 (1876)].

3363. **Q 1, P 3 c α.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sull'affinità circolare non-euclidea. [*G. B.*, v. XVI, pp. 256-262 (1878)].

3364. **Q 1.**
RICORDI (Ettore). I circoli nella geometria non euclidea. [*G. B.*, v. XVIII, pp. 255-270 (1880)].

Q 1. (*Vedi* n° 3049).

3365. **Q 1 a.**
HOÜEL (J.). Sur l'impossibilité de démontrer, par une construction plane, le principe de la théorie des parallèles dit *postulatum d'Euclide* (*). [*G. B.*, v. VIII, pp. 84-89 (1870)].

3366. **Q 1 a.**
CASSANI (Pietro). Intorno alle ipotesi fondamentali della geometria. [*G. B.*, v. XI, pp. 331-339 (1873)].

3367. **Q 1 a.**
GÜNTHER (Sigismondo). Sulla possibilità di dimostrare l'assioma delle parallele mediante considerazioni stereometriche. (Traduzione dal tedesco di A. Sparagna). [*G. B.*, v. XIV, pp. 97-107 (1876)].

3368. **Q 1 a.**
CASSANI (Pietro). Nuove proposte intorno ai fondamenti della geometria. [*G. B.*, v. XV, pp. 284-288 (1877)].

3369. **Q 1 a.**
CASSANI (Pietro). I nuovi fondamenti della geometria. [*G. B.*, v. XX, pp. 143-165 (1882)].

Q 1 a. (*Vedi* n° 3041).

(*) Extrait des Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.

3370. **Q 1 b.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sulla Geometria immaginaria di Lobatschewsky. [*G. B.*, v. V, pp. 217-231 (1867)].

3371. **Q 1 b.**
LOBATSCHEWSKY (Nicola). Pangeometria, o sunto di geometria fondata sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele (*). [*G. B.*, v. V, pp. 273-336 (1867)].

3372. **Q 1 b.**
BOLYAI (Giovanni). Sulla scienza dello spazio assolutamente vera, ed indipendente dalla verità o dalla falsità dell'assioma XI di Euclide (giammai da potersi decidere a priori) (**). [*G. B.*, v. VI, pp. 97-115 (1868)].

3373. **Q 1 b, O 6 f.**
BELTRAMI (Eugenio). Saggio di interpretazione della geometria non euclidea. [*G. B.*, v. VI, pp. 284-312 (1868)].

3374. **Q 1 b.**
BELTRAMI (Eugenio). Teorema di geometria pseudosferica. [*G. B.*, v. X, pag. 53 (1872)].

3375. **Q 1 b.**
DE ZOLT (Antonio). Saggio di pangeometria. [*G. B.*, v. XV, pp. 336-361 (1877)].

3376. **Q 2, L^2 19 c, N^2 1 c.**
ASCHIERI (Ferdinando). Coordinate omogenee di alcune forme, che possono riguardarsi come elementi semplici di spazii a sei dimensioni, e di alcune forme geometriche in essi spazii. [*G. B.*, v. XII, pp. 368-374 (1874)].

3377. **Q 2, R 2 b.**
MINOZZI (Achille). Sui centri di gravità. [*G. B.*, v. XV, pp. 235-247 (1877)].

3378. **Q 2.**
CASSANI (Pietro). Geometria pura euclidiana ad *n* dimensioni. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 1-19 (1885)].

3379. **Q 2.**
CESÀRO (Ernesto). Alcune misure negli iperspazii. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 49-55 (1886)].

(*) Versione dal francese.

(**) Versione dal latino di Giuseppe Battaglini.

3380. **Q 2.**
LORIA (Gino). Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 96-101 (1888)].

3381. **Q 2.**
PIERI (Mario). Sopra un teorema di geometria ad *n* dimensioni. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 251-254 (1888)].

3382. **Q 2.**
LORIA (Gino). Sulle curve razionali normali in uno spazio ad *n* dimensioni. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 334-347 (1888)].

3383. **Q 2, P 2 a.**
DEL RE (Alfonso). Un teorema nella geometria di una certa classe di corrispondenze. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 348-351 (1888)].

3384. **Q 2.**
LORIA (Gino). Di due rappresentazioni univoche dello spazio rigato su una forma lineare di quarta specie. [*G. B.*, a. XXVII, pp. 224-225 (1889)].

Q 2. (*Vedi* ni 2869, 3041, 3192, 3328).

3385. **Q 4 b** α.
SARDI (Ciro). Proprietà di un determinante. [*G. B.*, v. II, pp. 376-380 (1864)].

R. (*Vedi* n° 3483).

3386. **R 1 a, O 3 d.**
PADELLETTI (Dino). Sulle accelerazioni d'ordine superiore al primo. [*G. B.*, v. XIII, pp. 129-149 (1875)].

3387. **R 1 a, R 7 b.**
BASSANI (Anselmo). Nota di cinematica. Traiettoria d'un punto sollecitato da due forze, l'una attrattiva e l'altra ripulsiva emananti da un centro d'azione fisso. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 80-88 (1885)].

R 1 b α. (*Vedi* n° 3340).

3388. **R 1 c.**
BELTRAMI (Eugenio). Del moto geometrico di un solido che ruzzola sopra un altro solido. [*G. B.*, v. X, pp. 103-115 (1872)].

3389. **R 1 c, N¹ 1.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sul movimento geometrico infinitesimo di un sistema rigido. [*G. B.*, v. X, pp. 207-216 (1872)].

3390. **R 1 c, N' 1.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sul movimento geometrico finito di un sistema rigido. [*G. B.*, v. X, pp. 295-302 (1872)].

3391. **R 1 c.**

PADELLETTI (Dino). Sull'accelerazione normale. [*G. B.*, v. XIII, pp. 115-128 (1875)].

3392. **R 1 c.**

GAUTERO (Giacinto). Del movimento d'una superficie che ne tocca costantemente un'altra fissa. [*G. B.*, v. XX, pp. 168-193 (1882)].

3393. **R 1 c, O 8 d.**

MARCOLONGO (Roberto). Sull'accelerazione nel moto di un solido intorno ad un punto fisso. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 90-106 (1889)].

3394. **R 1 f.**

PADELLETTI (Dino). Sul concetto di coppia in Cinematica. [*G. B.*, v. XV, pp. 54-61, 101-110, 178-186, 248-256 (1877)].

3395. **R 2 b.**

DORNA (Alessandro), FERRARI (M.), BATTAGLINI (Giuseppe), MOGNI (Antonio). Quistioni 36, 37, e soluzioni. [*G. B.*, v. II, pp. 160, 224, 255-256, 289-294 (1864)].

3396. **R 2 b.**

MOGNI (Antonio). Sopra gli assi permanenti di rotazione di un corpo, e soluzione della questione 37. [*G. B.*, v. II, pp. 289-294 (1864)].

R 2 b. (*Vedi* n° 3377).

3397. **R 2 c.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Nota sugli assi principali. [*G. B.*, v. IX, pp. 38-45 (1871)].

3398. **R 2 c, N' 1.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sulla teorica dei momenti d'inerzia. [*G. B.*, v. XI, pp. 62-70 (1873)].

3399. **R 2 c.**

CHELINI (Domenico). Sopra i sistemi materiali di egual momento d'inerzia. — Osservazione del prof. Beltrami. [*G. B.*, v. XII, pp. 201-205 (1874)].

R 2 c. (*Vedi* ni 3121, 3412).

3400. **R 3, N' 1.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sulla teorica dei momenti. [*G. B.*, v. X, pp. 175-180 (1872)].

3401. **R 3, R 7 a, R 7 b, R 4 b.**
PADELLETTI (Dino). Studii sui diagrammi reciproci. [*G. B.*, v. XVII, pp. 339-359 (1879)].

R 3. (*Vedi* n° 3493).

3402. **R 3 a α, R 5 c.**
DEL RE (Alfonso). Sulle funzioni di forza. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 332-344 (1885)].

R 4. (*Vedi* n° 2963).

3403. **R 4 a.**
JANNI (Vincenzo). Sul momento d'una forza preso rispetto ad un asse. [*G. B.*, v. I, pp. 282-283. 351-354 (1863)].

3404. **R 4 a.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sul parallelogrammo delle forze. [*G. B.*, v. I, pp. 365-367 (1863)].

3405. **R 4 a.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Intorno alle condizioni di equilibrio di un sistema di forma invariabile. [*G. B.*, v. I, pp. 367-368 (1863)].

3406. **R 4 a.**
DORNA (Alessandro). Sulla dimostrazione del parallelogrammo delle forze. [*G. B.*, v. II, pp. 63-64 (1864)].

3407. **R 4 a, L^2 7.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sull'equilibrio di quattro forze nello spazio e soluzione della quistione 45. [*G. B.*, v. IV, pp. 93-95 (1866)].

3408. **R 4 a, N^1.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sulla composizione delle forze. [*G. B.*, v. X, pp. 133-140 (1872)].

3409. **R 4 a, N^1 1.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sulle serie dei sistemi di forze. [*G. B.*, v. X, pp. 180-187 (1872)].

3410. **R 4 a.**
GEBBIA (Michele). Sulla stabilità virtuale dell'equilibrio d'un punto materiale isolato. [*G. B.*, v. XVI, pp. 177-197 (1878)].

R 4 a. (*Vedi* n^i 3161, 3401).

3411. **R 4 a α.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Intorno ad una memoria del sig. D. Turazza. [*G. B.*, v. II, pp. 295-297 (1864)].

3412. **R 4 a α, R 2 c.**
CROCCHI (Leopoldo). Un'osservazione intorno alle coppie per un sistema di forze parallele. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 89-94 (1885)].

3413. **R 4 b.**
DORNA (Alessandro). Sulla catenaria di eguale resistenza. [*G. B.*, v. I, pp. 73-77 (1863)].

3414. **R 4 b.**
PADELLETTI (Dino). Sulla teoria dei poligoni e delle curve funicolari. [*G. B.*, v. XIV, pp. 14-47 (1876)].

R 4 b. (*Vedi* n° 3242).

3415. **R 5.**
PADOVA (Ernesto). Sopra due teoremi del sig. Neumann. [*G. B.*, v. VIII, pp. 296-301 (1870)].

3416. **R 5 a.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Nota intorno ad una superficie di 8° ordine. [*G. B.*, v. XIII, pp. 155-160 (1875)].

3417. **R 5 a α.**
PACI (Paolo). Sopra la funzione potenziale di una massa distribuita su di una superficie. [*G. B.*, v. XV, pp. 289-298 (1877)].

3418. **R 5 b.**
DEL GROSSO (Remigio). Memoria sull'attrazione degli sferoidi. [*G. B.*, v. VII, pp. 137-151, 193-209 (1869); v. VIII, pp. 97-128, 206-221, 333-365 (1870)].

3419. **R 5 b.**
BELTRAMI (Eugenio). Intorno ad una trasformazione di Dirichlet. [*G. B.*, v. X, pp. 49-52 (1872)].

3420. **R 5 b.**
MOLLO (Angelo). Sopra un teorema di elettricità statica. [*G. B.*, v. XIX, pp. 373-379 (1881)].

3421. **R 5 c.**
ANGELITTI (Filippo). Sull'attrazione secondo una potenza intera qualunque della distanza. [*G. B.*, v. XX, pp. 346-368 (1882)].

3422. **R 5 c.**
ANGELITTI (Filippo). Sul potenziale e sull'attrazione di un anello e di una piastra circolare sottile e uniforme sopra un punto non occupato del suo piano secondo una potenza intera qualunque della distanza. [*G. B.*, v. XXI, pp. 68-91 (1883)].

R 5 c. (*Vedi* n° 3402).

R 7. (*Vedi* n° 2963).

3423. **R 7 a, R 8 f.**
PENNACCHIETTI (Giovanni). Sugl'integrali delle equazioni del moto di un punto materiale. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 158-167 (1885)].

R 7 a. (*Vedi* n° 3401).

3424. **R 7 a α.**
BATTAGLINI (Giuseppe). Sul movimento per una linea di 2° ordine. [*G. B.*, v. XVII, pp. 43-52 (1879)].

3425. **R 7 a α.**
DAINELLI (Ugo). Sulla decomposizione della forza acceleratrice d'un punto materiale libero che si muove secondo una curva qualunque. [*G. B.*, v. XIX, pp. 171-197 (1881)].

3426. **R 7 a β, R 7 g.**
AMOROSO (Nicola). Un teorema di meccanica. [*G. B.*, v. XIX, pp. 380-384 (1881)].

3427. **R 7 b.**
MOGNI (Antonio). Sopra le diverse espressioni della forza acceleratrice nella teoria delle forze centrali. [*G. B.*, v. IV, pp. 339-344 (1866)].

3428. **R 7 b.**
BELTRAMI (Eugenio). Lettera ad Antonio Mogni. [*G. B.*, v. V, pp. 89-92 (1867)].

3429. **R 7 b.**
MORERA (Giacinto). Sul moto di un punto attratto da due centri fissi colla legge di Newton. [*G. B.*, v. XVIII, pp. 34-71 (1880)].

3430. **R 7 b, U 3.**
MARENGO BASTIA (Carlo). Del moto d'un punto attratto da un centro fisso con una forza proporzionale ad una potenza della distanza considerato come moto perturbato. [*G. B.*, v. XXII, pp. 167-190 (1884)].

3431. **R 7 h.**

BONACINI (Carlo). [illegible] la legge di Newton [illegible] pp. 44-51 ([illegible]).

R 7 h. [illegible].

3432. **R 7 h [illegible]**

MOGNI (Antonio). [illegible] conto della [illegible] della terra [illegible].

3433. **R 7 b [illegible]**

DAINELLI (Ugo). [illegible] pp. 27[illegible]-300 ([illegible]).

3434. **R 7 b [illegible]**

NAGY (Albino). [illegible] pp. 369-374 ([illegible]).

3435. **R 7 c.**

DAINELLI (Ugo). [illegible] sopra una curva [illegible] [G. B., v. [illegible], pp. [illegible]].

3436. **R 7 d.**

PADELLETTI (Dino). Sopra una proprietà [illegible] [G. B., v. XIII, pp. 201-203 (1875)].

3437. **R 7 f, O 2 a.**

NICODEMI (Rubino). Esercizii. [*G. B.*, v. XIII, pp. 113-114 (1875)].

3438. **R 7 g.**

PADOVA (Ernesto). Applicazione del metodo di Hamilton al moto di un punto sopra una superficie. [*G. B.*, v. VIII, pp. 90-96 (1870)].

R 7 g. (*Vedi* n° 3426).

3439. **R 7 g α.**

MOGNI (Antonio). Sopra il pendolo ad oscillazioni coniche. [*G. B.*, v. IV, pp. 327-338 (1866)].

R 8. (*Vedi* n° 2963).

3440. **R 8 a.**

TURAZZA (Domenico). Di un nuovo teorema relativo alla rotazione di un corpo intorno ad un asse. [*G. B.*, v. III, pp. 146-149 (1865)].

3441. **R 8 a.**

JANNI (Giuseppe). Nota sulla rotazione dei corpi. [*G. B.*, v. V, pp. 355-357 (1867)].

3442. **R 8 a.**

BATTAGLINI (Giuseppe). Sul movimento d'un sistema di forma invariabile. [*G. B.*, v. XI, pp. 359-367 (1873)].

3443. **R 8 a α.**

DE GASPARIS (Annibale). Moto di un sistema invariabile di punti materiali esistenti in un piano intorno al centro di gravità. [*G. B.*, v. IV, pp. 353-358 (1866)].

3444. **R 8 a α, R 8 b.**

BREGLIA (Ernesto). Sopra due teoremi del Prof. Gebbia. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 303-317 (1889)].

R 8 b. (*Vedi* n° 3444).

3445. **R 8 e.**

DORNA (Alessandro). Memoria sulla stabilità dell'equilibrio. [*G. B.*, v. II, pp. 65-72, 97-103 (1864)].

3446. **R 8 e.**

FORMENTI (Carlo). Equazioni finite del moto permanente di un sistema. [*G. B.*, v. XV, pp. 268-283 (1877)].

3447. **R 8 e α.**

MAGGI (Gian Antonio). Sul moto di un filo flessibile ed inestendibile che si sposta pochissimo dalla sua posizione d'equilibrio. [*G. B.*, v. XIX, pp. 1-63 (1881)].

3448. **R 8 e α, R 8 e β.**

PADOVA (Ernesto). Sul problema delle piccole oscillazioni che un filo flessibile ed inestendibile compie attorno ad una configurazione d'equilibrio. [*G. B.*, v. XXIII, pp. 235-243 (1885)].

R 8 f. (*Vedi* n° 3423).

3449. **R 9 a.**

DORNA (Alessandro). Nozioni teoriche sull'attrito. [*G. B.*, v. III, pp. 202-213 (1865)].

3450. **S 1 a.**

BUSTELLI (Anton Maria). Determinazione analitica dei centri di pressione delle superficie immerse in un liquido omogeneo pesante. [*G. B.*, v. VII, pp. 152-159, 213-220 (1869)].

3451. **S 2 e α.**

PADOVA (Ernesto). Del moto di un ellissoide in un fluido incompressibile ed indefinito. [*G. B.*, v. VIII, pp. 327-332 (1870)].

3452. **S 4.**
ZANNOTTI (Michele). Lezioni di fisica [illegible]. [G. B., v. VII, pp. 160-173, 351-368 (1869); v. VIII, pp. [illegible] (1870)].

3453. **S 4.**
VECCHIO (Angelo). Alcune osservazioni su una pagina [illegible] « Théorie mécanique de la Chaleur ». [*G. B.*, v. X, pp. [illegible] (1872)].

3454. **S 4 b.**
SANDRUCCI (A.). Sopra la costante *R* nell'equazione [illegible]. [G. B., v. XXV, pp. 73-81 (1887)].

3455. **S 4 b α.**
MOLLO (Angelo). Sopra una formola di termodinamica. [G. B., v. XXIII, pp. 76-79 (1885)].

3456. **S 4 b α.**
CESÀRO (Ernesto). Intorno ad una pretesa dimostrazione di termodinamica. [*G. B.*, v. XXIV, pp. 158-163 (1886)].

3457. **T 2 a α.**
ARZELÀ (Cesare). Deformazione di un ellissoide omogeneo elastico isotropo per l'azione di forze, che agiscono sopra tutti i punti della sua massa, e che ammettono una funzione potenziale della forma

$$f = Px^2 + Qy^2 + Rz^2 + V,$$

rispetto alla quale la superficie dell'ellissoide sia di livello. [*G. B.*, v. XII, pp. 339-347 (1874)].

3458. **T 3 b.**
MOLLO (Angelo). Sulla diffrazione dei reticoli. [*G. B.*, v. XIX, pp. 131-135 (1881)].

3459. **T 7 a.**
CAMPETTI (Adolfo). Sulla distribuzione delle correnti sulle superficie. [*G. B.*, v. XXVI, pp. 377-380 (1888)].

U. (*Vedi* n° 3497).

3460. **U 2.**
DE GASPARIS (Annibale). Formole pel calcolo delle orbite di pianete e comete. [*G. B.*, v. III, pp. 42-46 (1865)].

3461. **U 2.**
HARZER (Paolo). Movimento d'un ellissoide di rotazione rigido, schiacciato, composto di strati di densità costante che cresce verso il centro, e rotante intorno all'asse di rotazione sotto l'influenza d'un corpo che gira intorno al

centro dell'ellissoide secondo le leggi di Kepler. [*G. B.*, v. XVII, pp. 53-68, 183-201 (1879)].

3462. **U 3.**
DEL GROSSO (Remigio). Sulle perturbazioni planetarie. [*G. B.*, v. V, pp. 65-88, 129-152, 193-216 (1867); v. VI, pp. 1-15, 125-152, 324-343 (1868)].

U 3. (*Vedi* n° 3430).

3463. **U 9.**
DE GASPARIS (Annibale). Rotazione di un sistema variabile di tre masse che verificano la legge delle aree. [*G. B.*, v. III, pp. 257-268, 344-362 (1865)].

3464. **U 9.**
DE GASPARIS (Annibale). Sopra una funzione che presenta il caso di un minimo nel problema dei tre corpi. [*G. B.*, v. IV, pp. 33-37 (1866)].

3465. **U 9.**
DE GASPARIS (Annibale). Ricerche ulteriori sulla rotazione di un sistema di tre masse, che verificano la legge delle aree. [*G. B.*, v. IV, pp. 202-209, 348-352 (1866)].

3466. **U 10 a, L^2 11 b.**
MUGNAINI (Ettore). Sulla sfera osculatrice all'ellissoide di rivoluzione. [*G. B.*, v. XVI, pp. 270-278 (1878)].

3467. **U 10 a.**
JADANZA (Nicodemo). Sulla latitudine, longitudine ed azimut dei punti di una rete trigonometrica. [*G. B.*, v. XVIII, pp. 137-158 (1880)].

3468. **U 10 a.**
PUCCI (Enrico). Sulle posizioni geografiche. [*G. B.*, v. XVIII, pp. 358-368 (1880)].

3469. **U 10 a.**
PUCCI (Enrico). Sulla teoria delle basi geodetiche. [*G. B.*, v. XIX, pp. 151-155 (1881)].

3470. **U 10 a.**
DE BERARDINIS (Giovanni). Sulla livellazione geometrica. [*G. B.*, v. XX, pp. 101-142 (1882)].

3471. **U 10 a, L^2 13 b.**
PIZZETTI (Paolo). Sulla curva d'allineamento. [*G. B.*, v. XXI, pp. 1-15 (1883)].

3472. **U 10 a, J 2 e.**
DE BERARDINIS (Giovanni). Sulla determinazione di alcune incognite. [*G. B.*, v. XXV, pp. 313-320 (1887)].

U 10 a. (*Vedi* n° 3068).

3473. **V 1.**
ANONIMO. Articolo bibliografico sul « Rapport sur les progrès de la Géomètrie par M. Chasles ». [*G. B.*, v. X, pp. 190-192 (1872)].

3474. **V 1.**
VALERIANI (Valeriano). Alcune notevoli applicazioni della induzione matematica. [*G. B.*, v. XV, pp. 34-53 (1877)].

3475. **V 1.**
FIEDLER (Guglielmo) (*). Sulla riforma dell'insegnamento geometrico. — Nota seguita da tre lettere inedite dell'Autore. [*G. B.*, v. XVI, pp. 243-255 (1878)].

3476. **V 1 a.**
WILSON (J. M.). Euclide come testo di geometria elementare (**). [*G. B.*, v. VI, pp. 361-368 (1868)].

3477. **V 1 a.**
HIRST (T. A.). Parole sull'introduzione agli elementi di geometria del professore Wright (***). [*G. B.*, v. VI, pp. 369-370 (1868)].

3478. **V 1 a.**
HOUËL (J.), BRIOSCHI (Francesco), CREMONA (Luigi), RUBINI (Raffaele). Corrispondenza. [*G. B.*, v. VII, pp. 50-54, 111 (1869)].

3479. **V 1 a.**
BESSO (Davide). Del concetto di funzione nell'insegnamento della geometria elementare. [*G. B.*, v. VII, pp. 131-136 (1869)].

3480. **V 1 a.**
D'OVIDIO (Errico). Nota sul libro XII di Euclide, e sul trattato di Archimede relativo alla misura del circolo e dei corpi rotondi. [*G. B.*, v. IX, pp. 122-124 (1871)].

3481. **V 1 a.**
HIRST (T. A.). Un discorso sopra Euclide come libro di testo. [*G. B.*, v. IX, pp. 180-187 (1871)].

3482. **V 1 a, K 20.**
HOÜEL (J.). Remarques sur l'enseignement de la trigonométrie. [*G. B.*, v. XIII, pp. 72-79 (1875)].

(*) Versione dal tedesco di Gabriele Torelli.

(**) Estratto dal Giornale *The Educational Times*, Sett. 1868, e tradotto da R. R.

(***) Estratte dal giornale *The Educational Times*, Nov. 1868 e tradotte da R. R.

3483. **V 1 a, R.**
PADELLETTI (Dino). Sulle relazioni tra cinematica e meccanica. [*G. B.*, v. XIV, pp. 193-218, 280-297 (1876)].

3484. **V 3 b.**
TRUDI (Nicola). Sul criterio degli equimoltiplici adoperato dagli antichi geometri nella teorica delle proporzioni. [*G. B.*, v. I, pp. 337-340 (1863)].

3485. **V 7, L¹ 9 b, I 10, V 9.**
ANONIMO. Annunzii bibliografici. [*G. B.*, v. VIII, pp. 377-380 (1870)].

V 7. (*Vedi* n° 3104).

3486. **V 9.**
BETTI (Errico). Necrologia di Ottaviano Fabrizio Mossotti. [*G. B.*, v. I, pag. 92 (1863)].

3487. **V 9.**
PADOVA (Ernesto). Bibliografia. [*G. B.*, v. VI, pp. 372-374 (1868); v. VII, pp. 221-223 (1869)].

3488. **V 9.**
BELTRAMI (Eugenio). Articolo necrologico su Alfredo Clebsch. [*G. B.*, v. X, pp, 347-348 (1872)].

3489. **V 9.**
B...NI (E.). Notizia bibliografica. [*G. B.*, v. XI, pp. 42-43 (1873)].

3490. **V 9.**
NEUMANN (Carlo). Commemorazione di Rodolfo Federico Alfredo Clebsch, indirizzata all'Accademia di Gottinga dal Prof. Carlo Neumann, in nome di molti amici e scolari del defunto, ed inserita nelle *Nachrichten* della medesima Accademia. (Traduzione). [*G. B.*, v. XI, pp. 44-48 (1873)].

3491. **V 9.**
CLEBSCH (Alfredo). Commemorazione di Giulio Plücker (*). [*G. B.*, v. XI, pp. 153-179 (1873)].

3492. **V 9.**
ARMENANTE (Angelo). Bibliografie. [*G. B.*, v. XI, pp. 254-256, 301-308 (1873); v. XIII, pp. 80-81 (1875)].

(*) Dal 16° tomo delle Memorie della Società Reale di Gottinga, 1872. Traduzione di E. Beltrami.

3493. **V 9, R 3, N'.**
RUFFINI (Ferdinando). Bibliografia: «D. C h e l i n i, Sulla composizione geometrica dei sistemi di rette di aree e di punti.—Sulla nuova geometria dei complessi». [*G. B.*, v. XII, pp. 22-26 (1874)].

3494. **V 9.**
FAVARO (Antonio). Intorno alle opere di A l f r e d o C l e b s c h. (Versione dal tedesco). [*G. B.*, v. XII, pp. 28-74 (1874)].

3495. **V 9.**
ANONIMO. Bibliografie. [*G. B.*, v. XII. pp. 206-207 (1874)].

3496. **V 9, K 22 a.**
TORELLI (Gabriele). Notizie storiche relative alla teoria delle trasformazioni in geometria descrittiva. [*G. B.*, v. XIII, pp. 352-355 (1875)].

3497. **V 9, U.**
ZONA (Temistocle). Annunzio bibliografico. [*G. B.*, v. XIV, pag. 377 (1876)].

3498. **V 9, J 2.**
ZANOTTI-BIANCO (Ottavio). Sopra due passi della ***Storia della teoria matematica delle probabilità*** del sig. T o d h u n t e r. [*G. B.*, v. XVI, pp. 26-30 (1878)].

3499. **V 9.**
ANONIMO. Cenno Necrologico: «A n g e l o A r m e n a n t e». [*G. B.*, v. XVI, pag. 168 (1878)].

3500. **V 9.**
CREMONA (Luigi), BELTRAMI (Eugenio). «D o m e n i c o C h e l i n i». [*G. B.*, v. XVI, pag. 345 (1878)].

3501. **V 9, K 22.**
RICCARDI (Michelangelo). Notizia bibliografica. [*G. B.*, v. XVI, pp. 378-380 (1878)].

3502. **V 9, H 4.**
RUBINI (Raffaele). Intorno ad un punto di storia matematica. [*G B.*, v. XVII, pp. 149-159 (1879)].

3503. **V 9.**
TORELLI (Gabriele). «N i c o l a T r u d i». [*G. B.*, v. XXII, pp. 304-307 (1884)].

3504. **V 9.**
GENOCCHI (Angelo). Cenni sull'ingegnere S a v i n o R e a l i s. [*G. B.*, v. XXIV, pag. 56 (1886)].

3505. **V 9.**

LORIA (Gino). L'opera scientifica di Ettore Caporali. [*G. B.*, v. XXVII, pp. 1-32 (1889)].

V 9. (*Vedi* ni 2921, 3060, 3173, 3485).

3506. **X 4 b.**

ISÈ (Ernesto). Nota di calcolo grafico sulla risoluzione delle equazioni di primo grado. [*G. B.*, v. XIV, pp. 180-189 (1876)].

3507. **X 4 b** δ.

CROCCHI (Leopoldo). Nota di calcolo grafico sopra la risoluzione d'un sistema di due equazioni di 1° grado. [*G. B.*, v. XV, pp. 86-88 (1877)].

BIBLIOTECA MATEMATICA.

PUBBLICAZIONI NON PERIODICHE

PERVENUTE IN DONO AL CIRCOLO.

XV° ELENCO: (gennaio 1896-febbraio 1897).

[*Vedi* gli Elenchi precedenti: t. X, pp. 6-14 e *retro*].

Alagna, R. [*Vedi* t. VII, pag. 1]. Le relazioni irreduttibili fra gl'invarianti d'una forma qualunque d'ottavo ordine. *Rend. Circ. Matem.*, X, 1896.

Allievi, L. (Napoli). Cinematica della biella piana. Napoli, 1895.

Amodeo, F. (Napoli). [*Vedi* t. VII, pag. 1]. Projezione stereoscopica. *Annali R. Istituto Tecnico e Nautico di Napoli*, 1895.

— Lezioni di Geometria proiettiva, dettate nella R. Università di Napoli nell'anno scolastico 1895-96. Napoli 1896.

— Curve k-gonali di 1ª e di 2ª specie. *Ann. di Matem.*, XXIV$_2$, 1896.

— Sulla introduzione alla geometria proiettiva. *Giorn. di Matem.*, XXXIV, 1896.

— Sistemi lineari di curve algebriche di genere massimo ad intersezioni variabili collineari. *Rendic. Acc. Napoli.* Marzo 1896.

— Curve aggiunte e serie specializzate. *Ibid.*, novembre 1896.

Appell, P. et **Lacour, E.** (Paris, Nancy). Principes de la Théorie des Fonctions elliptiques et applications. Paris, 1897.

Autonne, L. (Lyon). Sur les pôles des fonctions uniformes à deux variables indépendantes. *Rendic. Circ. Matem.*, X, 1896.

Bagnera, G. (Palermo). Sul teorema dell'esistenza delle funzioni Fuchsiane. *Rivista di Matem.*, 1896.

— Sul luogo dei contatti tripunti delle curve d'un fascio con le curve d'una rete. *Rend. Circ. Matem.*, X, 1896.

Bardelli, G. (Milano). [*Vedi* t. VIII, pag. 1]. Sull'uso delle coordinate obliquangole nella Meccanica razionale. *Rend. Istituto Lombardo*, $XXIX_2$, 1896.

Bendixson, I. (Stockholm). Sur le développement des intégrales d'un système d'équations différentielles au voisinage d'un point singulier. *Öfversigt af k. Vetenskaps-Ak. Förhandlingar*, 1894.

Berzolari, L. (Torino). [*Vedi* t. X, pag. 6]. Sulla teoria dell'involuzione, specialmente dell'involuzione cubica. *Rend. Acc. Napoli*, febbraio 1891.

— Sull'involuzione cubica. *Ibid.*, aprile 1891.

— Sulla curva del terzo ordine dotata d'un punto doppio. *Rendic. Istituto Lombardo*, XXV_2, 1892.

— Sulle condizioni invariantive perchè due quintiche binarie abbiano quattro radici comuni. *Ann. di Matem.*, XIX_2, 1891.

— Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle curve gobbe razionali del quart'ordine. *Ibid.*, XX_2, 1892.

— Sulle curve razionali di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. *Ibid.*, XXI_2, 1893.

— Sulle intersezioni di tre superficie algebriche. *Ibid.*, $XXIV_2$, 1896.

— Sopra un problema che comprende quello di trovare il numero degli ombelichi d'una superficie generale d'ordine *n*. *Atti Acc. Torino*, XXX, 1895.

— Sulle curve piane che in due dati fasci hanno un semplice o un doppio contatto oppure si osculano. *Ibid.*, XXXI, 1896.

— Sulla curva gobba razionale del quint'ordine. *Mem. Acc. Lincei*, VII_4, 1893.

— Sulle corrispondenze algebriche [$M_1, M_2, \ldots M_r$] fra R punti di uno spazio lineare di quante si vogliano dimensioni. *Rend. Acc. Lincei*, IV_5, 1895.

— Sulle equazioni differenziali delle quadriche di uno spazio ad *n* dimensioni. *Ibid.*, V_5, aprile 1896.

Bettazzi, R. (Torino). [*Vedi* t. VII, pag. 2]. Fondamenti per una teoria generale dei gruppi. *Periodico di Matem.*, XI, 1896.

— Sulla Catena di un ente in un gruppo. *Atti Acc. Torino*, XXXI, 1896.

— Gruppi finiti ed infiniti di Enti. *Ibid.*, XXXI, 1896.

— Sulle definizioni del Gruppo finito. *Ibid.*, XXXII, 1897.

Bolyai, J. The Science Absolute of Space. Independent of the Truth or Falsity of Euclid's Axiom XI (which can never be decided a priori). [Translated from the Latin by Dr. G. B. Halsted]. Austin, Texas, 1896.

Bohuslav, B. Argon a Helium, nový typ plynů. *Rozpravy České Ak.*, IV_2, 1895.

Brambilla, A. (Napoli). [*Vedi* t. X, p. 6]. Sopra una famiglia di superficie dell'ottavo ordine. Nota 1ª. *Giornale di Matem.*, XXXV, 1896.

— Di taluni sistemi di quartiche gobbe razionali annesse ad una superficie cubica. Nota 1ª. *Rend. Acc. Napoli*, aprile 1896.

Brioschi, F. (Milano). Sopra un teorema del sig. Hilbert. *Rend. Circ. Matem.*, X, 1896.

Brun, F. de (Stockholm). Bidrag till Weierstrass' Teori för algebraiska Funktioner.—Akademisk Afhandling. Upsala, 1895.

Burali-Forti, C. (Torino). [*Vedi* t. X, pag. 6]. Il metodo del Grassmann nella Geometria projettiva. *Rend. Circ. Matem.*, X, 1896.

— Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles et leurs applications à la limite d'une ensemble variable. *Mathem. Annalen*, XLVII, 1896.

Bureau des Longitudes. (Paris). Annuaire pour l'an 1897. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1897.

Burgatti, P. (Roma). [*Vedi* t. X, pag. 6]. Di alcuni invarianti relativi alle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine e del loro uso. *Rendiconti Acc. Lincei*, V_5, dicembre 1896.

— Sulla torsione geodetica delle linee tracciate sopra una superficie. *Rendiconti Circ. Matem.*, X, 1896.

Caldarera, F. (Palermo). [*Vedi* t. VIII, pag. 3]. Trattato di Trigonometria rettilinea e sferica. Palermo, 1896.

Caldarera, G. (Catania). [*Vedi* t. IX, pag. 2]. Le sostituzioni rappresentate mediante trasposizioni. *Atti Acc. Gioenia di Catania*, IX_4, 1896.

Cantor, G. [*Vedi* t. X, pag. 6]. Contribuzione al fondamento della Teoria degli insiemi transfiniti. Traduzione di F. Gerbaldi. *Rivista Matem.*, 1895.

Capelli, A. (Napoli). [*Vedi* t. X, pag. 6]. L'Analisi Algebrica e l'interpretazione fattoriale delle potenze. *Giorn. di Matem.*, XXXIII, 1895.

— Alcune formole relative alle operazioni di polare. *Ibid.*, XXXIII, 1895.

— Sull'uso delle progressioni ricorrenti nella risoluzione delle equazioni algebriche. *Rend. Acc. Napoli*, luglio 1895.

— Sopra un principio generale di aritmetica ed una nuova deduzione del teorema di Hilbert. *Ibid.*, giugno 1896.

— Estensione del teorema di Hilbert al caso di polinomi con infiniti termini. *Ibid.*, settembre 1896.

Cassel, G. (Stockholm). Kritiska Studier öfver Theorin för de automorfa Funktionerna jämte deras användning för Integration af linjära Differentialekvationer.—Akademisk Afhandling. Upsala, 1894.

Castelli, E. (Livorno). Le nuove ricerche della elettricità. Parte I, Parte II. Livorno, 1896.

Castelnuovo, G. et **Enriques, F.** (Roma, Bologna). Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques. *Mathem. Annalen*, XLVIII, 1896.

Castelnuovo, G. (Roma). [*Vedi* t. IX, pag. 3]. Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica. *Memorie Soc. Italiana*, X_3, 1896.

— Sulle superficie di genere zero. *Ibid.*, X_3, 1896.

Cordone, G. (Genova). [*Vedi* t. X, pag. 6]. Sopra una classe d'equazioni risolubili algebricamente. *Rend. Circ. Matem.*, X, 1896.

De Franchis, M. (Palermo). Sulla curva luogo dei contatti d'ordine h delle curve di un fascio colle curve d'un sistema lineare ∞^h. *Rend. Circ. Matem.*, Palermo, X, 1896.

Del Re, A. (Modena). [*Vedi* t. X, pag. 7]. Sulla successiva projezione di una varietà quadratica su sè stessa. *Rendic. Acc. Lincei*, V_5, novembre 1896.

Demartres. (Lille). Cours d'Analyse. — Troisième Partie. Paris, 1896.

Di Pirro, G. (Roma). Sulle trasformazioni delle equazioni della dinamica. *Rend. Circ. Matem.*, X, 1896.

Domalíp, K.—Koláček, F. (Praga). Studie o elektrické resonanci. *Rozpravy České Ak.*, IV, 1895.

D'Ovidio, E. (Torino). [*Vedi* t. VIII, pag. 4]. Commemorazione del Socio Giuseppe Battaglini. *Rend. Acc. Lincei*, giugno, 1895.

Druxes, J. (Altkirk). Ueber reine Schaarschaar von Flächen zweiter Classe.— Inaugural-Dissertation. Strassburg, 1896.

End, W. (Fürth). Algebraische Untersuchungen über Flächen mit gemeinschaftlicher Curve. Inaugural-Dissertation, München, 1888.

Eneström, G. (Stockholm). [*Vedi* t. X, pag. 7]. Om ett matematiskt-statistiskt sätt att summariskt beräkna värdet af en tillämnad enkekassas förpliktelser. *Öfversigt of K. Vetenskaps-Ak. Förhandlingar*, 1895.

— Om lifränteberäkningsmetoderna under sextonhundratalet. *Ibid.*, 1896.

— Ett bidrag till mortalitetstabellernas historia före Halley. *Ibid.*, 1896.

— Befolkningsstatistiska formler för dödligheten, då hänsyn tages till emigration och immigration. *Ibid.*, 1896.

— Generalisation af ett par formler inom befolkningsstatistiken. *Ibid.*, 1896.

— Om aritmetiska och statistiska metoder för proportionella val. *Ibid.*, 1896.

Enriques, F. (Bologna). [*Vedi* t. X, pag. 8]. Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche. *Rend. Circ. Matem.*, X, 1896.

— Sulle irrazionalità da cui può dipendere la risoluzione d'un'equazione algebrica $f(xyz) = 0$ mediante funzioni razionali di due parametri. *Rend. Acc. Lincei*, dicembre 1895.

— Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche. *Ibid.*, V_5, 1896.

— Sopra le equazioni differenziali lineari del 4° ordine che divengono integrabili quando è noto un loro integrale particolare. *Rend. Istituto Lombardo*, $XXIX_2$, 1896.

— Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche. *Mem. Soc. Ital. delle Scienze*, X_3, 1896.

— Sui piani doppi di genere uno. *Ibid.*, X_3, 1896.

Fano, G. (Roma). [*Vedi* t. X, pag. 8]. Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè. *Rend. Circ. Matem.*, X, 1896.

— Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane del piano e sopra certi gruppi di trasformazioni projettive. *Ibid.*, X, 1896.

Feder, J. (Eupen). Die Configuration $(12_6, 16_3)$ und die zugehörige Gruppe von 2304 Collineationen und Correlationen.—Inaugural-Dissertation. Leipzig, 1896.

Fiedler, W. (Zürich). Die darstellende Geometrie. Leipzig, 1871.

Finsterwalder, (S.). Ueber Brennflächen und die räumliche Verteilung der Helligkeit bei Reflexion eines Lichtbündel's an einer spiegelnden Fläche. Inaugural-Dissertation, München, 1886.

Forsyth, A. R. (Cambridge). [*Vedi* t. X, pag. 8]. On twisted quartics of the second species. *The Quaterly Journal*, nov. 1895.

— Geodetics on an oblate Spheroid. *The Messenger of Math.*, October 1895.

— Coniugate points of geodesics on an oblate spheroid. *Ibid.*, March 1896.

— Some Algebraical Theorems connected with the Theory of Partitions. *Proceedings of the London Math. Soc.*, XXVII, 1895.

— Geodesics on Quadrics, not of Revolution. *Ibid.*, XXVI, 1896.

Frattini, G. (Roma). [*Vedi* t. VII, pag. 4]. Intorno a una proprietà della equazione di sesto grado. *Periodico di Matem.*, XI, 1896.

Gerbaldi, F. (Palermo). [*Vedi* t. X, pag. 8]. Un teorema sulle singolarità della Jacobiana di quattro superficie algebriche. *Rend. Circ. Matem. Palermo*, X, 1896.

— Sulle serie di funzioni analitiche. *Rivista di Matem.*, 1896.

Giudice, F. (Genova). [*Vedi* t. IX, pag. 4]. Sulle frazioni continue numeriche. *Periodico di Matem.*, XI, 1896.

— Sull'equazione di 5° grado. *Memorie Acc. Torino*, $XLVI_2$, dicembre 1896.

— Geometria Piana. Brescia, 1897.

Goursat, E. (Paris). [*Vedi* t. I, pag. 105]. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. Tome I. Paris, 1896.

Grane, N. (Lund). Ueber Kurven mit gleichartigen successiven Developpoiden.— Dissertation. Lund, 1894.

Gross, W. (Stuttgart). Ueber die Combinanten binärer Formensysteme, welche ebenen rationalen Curven zugeordnet sind. Inaugural-Dissertation, Stuttgart, 1887.

Gruss, G. — Láska, V. (Praga). Vyšetřování měn světlosti hvězd proměnných. *Rozpravy České Ak.*, IV, 1895.

Gugliuzzo, A. (Palermo). Sui multipli dei numeri della forma $10Q + R$ con $R = 1, 3, 7, 9$ e sopra una operazione di divisibilità. Palermo, 1897.

Hallgren, E. Om beräkningen af Abelska integralers omvändning. Akademisk Afhandling. Göteborg, 1894.

Halsted, G. (Austin, Texas). [*Vedi* t. VIII, pag. 5]. The Science Absolute of Space. Austin, 1896.

Herting, G. (Dachsbach). Über die gestaltlichen Verhältnisse der Flächen dritter Ordnung und ihrer parabolischen Kurven.— Figurentafel. Inaugural-Dissertation, Augsburg, 1887.

Johannes, J. (Bamberg). Die rationalen Raumkurven sechster Ordnung, erzeugt durch geometrische Transformation aus einem Kegelschnitte. Inaugural-Dissertation, Neustadt a. S.

Junker, F. (Lendsiedel). Über algebraische Korrespondenzen. Inaugural-Dissertation, Tübingen, 1889.

Kiepert, L. (Hannover). [*Vedi* t. X, pag. 9]. Grundriss der Differential-und Integral-Rechnung.—II Theil: Integral-Rechnung. Sexte Auflage, Hannover 1896.

Klein, F. (Gottinga). Sullo spirito aritmetico nella Matematica. [Traduzione del Prof. S. Pincherle]. *Rend. Circ. Matem.*, X, 1896.

Koch, H. von. Sur un théorème de la théorie des groupes continus de transformations. *Öfversigt af k. Vetenskaps-Ak. Forhandlingar*, 1894.

Koláček, F. (Praga). Theorie elektrických oscillací ve vodivé a polarisace schopné kouli. *Rozpravy České Ak.*, IV, 1895.

Kommerell, V. (Tübingen). Beiträge zur Gauss'schen Flächentheorie. Inaugural-Dissertation, Tübingen 1890.

Königsberger, L. (Heidelberg). Ueber die Principien der Mechanik. *Sitzungsb. d. k. preuss. Ak. zu Berlin*, juli 1896.

Köstlin, W. (Stuttgart). Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven. Inaugural-Dissertation, Dresden, 1895.

Laisant, C. A. (Paris). [*Vedi* t. X, pag. 9]. Recueil de problèmes de mathématiques. Géométrie du triangle. Paris, 1896.

Lenoble, E. (Lille). La théorie atomique et la théorie dualistique. Paris. 1896.

Lerch, M. (Praga). [*Vedi* t. X, pag. 10]. Příspěvky k theorii funkcí elliptických nekonečných řad a integrálů omezených. *Rozpravy České Ak.*, IV_2, 1894.

— Sur une espèce de séries semiconvergentes. *Bulletin international, Ac. des Sc. Prague*, mars 1896.

— Sur un théorème arithmétique de Zolotarev. *Ibid.*, mars 1896.

— Sur la transformation abélienne des séries trigonométriques. *Ibid.*, mai 1896.

Levi-Civita, T. (Padova). [*Vedi* t. X, pag. 10]. Sulla distribuzione indotta in un cilindro indefinito da un sistema simmetrico di masse. *Rend. Acc. Lincei*, IV_5, dicembre 1895; V_5, gennaio 1896.

Ljungh, Th. Ueber Isoptische und Orthoptische Kurven. Dissertation, Lund, 1895.

Lorenz, L. Oeuvres scientifiques. Revues et annotées par H. Valentiner. Tome I. Copenhague, 1896.

Loria, G. (Genova). [*Vedi* t. X, pag. 10]. Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Seconda edizione. Torino, 1896.

Martinetti, V. (Messina). [*Vedi* t. VIII, pag. 7]. Un'osservazione relativa alla configurazione di Kummer. *Giorn. di Matem.*, XXXIV, 1896.

Mascari, A. (Catania). Sulla frequenza e distribuzione in latitudine delle macchie solari osservate all'Osservatorio di Catania nel 1895. *Memorie Soc. Spettroscopisti Ital.*, XXV, 1896.

Mayer, A. (Leipzig). Die Kriterien des Minimums einfacher Integrale bei variabeln Grenzwerthen. *Berichte d. k. Sächs. Gesellschaft d. W. zu Leipzig*, october 1896.

— Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentiales. *Ibid.*, December 1896.

Meray, Ch. (Dijon). [*Vedi* t. X, pag. 11]. Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques. — Troisième Partie: Questions analytiques classiques. Paris, 1897.

Messina, A. (Palermo). I misuratori di Energia elettrica ed il loro controllo nell'illuminazione. Palermo, 1896.

Morera, G. (Genova). [*Vedi* t. VIII, pag. 7]. Sopra una formula di calcolo integrale. *Rend. Circ. Matem.*, X, 1896.

Niewenglowski, B. (Paris). [*Vedi* t. X, pag. 11]. Cours de Géométrie analytique à l'usage des Élèves de la Classe de Mathématiques spéciales et des Candidats aux Écoles du Gouvernement.—Tome III. Géométrie dans l'espace. Paris, 1896.

Nordenmark, N. V. E. (Upsala). Sur le moyen mouvement dans l'anneau des astéroïdes. Upsala, 1894.

Painlevé, P. (Paris). [*Vedi* t. X, pag. 11]. Leçons sur le Frottement. Paris 1895.

Peano, G. (Torino). [*Vedi* t. X, pag. 12]. Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni variabili. *Rend. Acc. Lincei*, IV_5, 1895.

— Sul pendolo di lunghezza variabile. *Rend. Circ. Matem.*, X, 1896.

Petersen, J. (Kopenhagen). Théorie des équations algébriques. [Traduction par H. Laurent]. Paris, 1897.

Petrini, H. (Upsala). Zur kinetischen Theorie der Gase. *Öfversigt af k. Vetenskaps-Ak. Förhandlingar*, 1894.

Phragmén, E. (Stockholm). Sur une méthode nouvelle pour réaliser, dans les élections, la représentation proportionelle des partis. *Öfversigt af k. Vetenskaps- Ak. Förhandlingar*, 1894.

Picard, É. (Paris). [*Vedi* t. X, pag. 12]. Traité d'Analyse. Tome III: Des singularités des intégrales des équations différentielles. Étude du cas ou la variable reste réelle; des courbes définies par des équations différentielles. Équations linéaires; analogies entre les équations algébriques et les équations linéaires. Paris, 1896.

Pieri, M. (Torino). [*Vedi* t. X, pag. 12]. Un sistema di postulati per la Geometria Projettiva astratta degli iperspazi. *Rivista di Matem.*, 1896.

— Sui principî che regolano la Geometria di Posizione. Nota II. Nota III. *Atti Acc. Torino*, XXXI, 1896.

— Sull'ordine della varietà generata da più sistemi lineari omografici. *Rend. Circ. Matem.*, XI, 1897.

Poulain, A. (Angers). Le Stang-planimètre. *Cosmos*, décembre 1894.

Procházka, B. (Prag). [*Vedi* t. X, pag. 12]. Poznámka ku sestrojení středu křivosti některých druhů křivek. *Rozpravy České Ak.*, IV_2, 1895.

Raffy, L. (Paris). Leçons sur les Applications géométriques de l'Analyse. Paris, 1896.

Reina, V. e **Cicconetti, G.** (Roma). Ricerche sul coefficiente di rifrazione terrestre eseguite in Roma nel 1895. *Memorie Soc. Italiana*, X_3, 1896.

Reina, V. (Roma). [*Vedi* t. X, pag. 12]. Triangolazione della città di Roma. *Rivista di Topografia e Catasto*, 1896.

Reye, Th. (Strassburg). [*Vedi* t. X, pag. 13]. Ueber quadratische Transformationen und rationale Flächen mit Kegelschnittschaaren. *Mathem. Annalen*, Bd. XLVIII, 1896.

— Beweis einiger Sätze von Chasles über konfokale Kegelschnitte. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, XLI, 1896.

Ricci, G. (Padova). [*Vedi* t. X, pag. 13]. Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque. *Memorie Acc. Lincei*, II_5, giugno 1896.

— Sulla Teoria degli Iperspazi. *Rend. Acc. Lincei*, IV_5, novembre 1895.

Riccò, A. (Catania). [*Vedi* t. IX, pag. 6]. Stato presente dei fenomeni endogeni nelle Eolie. *Bollettino Soc. Sismologica Ital.*, II, 1896.

— Righe spettrali atmosferiche osservate sull'Etna, a Nicolosi in Catania. *Mem. Soc. Spettroscopisti*, XXV, 1896.

Riccò, A. e **Saija, G.** (Catania). [*Vedi* t. IX, pag. 7]. Saggio di metereologia dell'Etna. *Annali Ufficio Centrale di Metereologia*, XVII, 1895.

Rouché, E. et **de Comberousse, Ch.** (Paris). Leçons de Géométrie.—Ire Partie. Paris, 1896.

Ruffini, F. P. (Bologna). [*Vedi* t. IX, pag. 7]. Delle accelerazioni che nel moto di un sistema rigido con un punto fisso sono dirette a uno stesso punto qualsivoglia dato. *Rend. Acc. di Bologna*, 1896.

Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Zur fünfzigjährigen Jubelfeier. Am I. Juli 1896.

Sauerbeck, P. (Reutlingen). Ueber die Raumkurve VI. Ordnung mit vier wirklichen Doppelpunkten. Inaugural-Dissertation, Tübingen, 1889.

Saya, G. (Catania). Nuova proiezione polare per planisferi celesti, e sue applicazioni. *Mem. Soc. Spettroscopisti*, XXV, 1896.

Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri di Roma. Annuario per l'anno scolastico 1896-97.

Smith, D. E. (Michigan). History of modern Mathematics. Copyright, 1896.

Tannery, J. et **Molk, J.** (Paris, Nancy). [*Vedi* t. VIII, pag. 9]. Éléments de la théorie des Fonctions elliptiques.—Calcul différentiel (IIe Partie). Paris, 1896.

Tisserand, F. Recueil Complémentaire d'Exercices sur le Calcul infinitésimal. Paris, 1896.

Torelli, G. (Palermo). [*Vedi* t. X, pag. 13]. Forme lineari alle differenze con fattori di primo grado commutabili. *Rendic. Acc. Napoli*, ottobre 1896.

Vaněček, J. S. (Jičině). [*Vedi* t. II, pag. 19]. Plochy orthogonálné. *Rozpravy Česki Akad.*, IV_2, 1895.

— Plocha kardioido-hyperboloidová. *Ibid.*; IV, 1895.

— Svazky orthogonálných Hyperboloidů. *Ibid.*, IV, 1895.

Vecchi, S. (Parma). [*Vedi* t. VI, pag. 10]. Per la diffusione dei Disegni Axonometrici. Parma, 1893.

Verde, F. (Spezia). Nota circa un pluviometro a correzione. Torino, 1894.

— Fotosestante. Firenze, 1896.

Visalli, P. (Livorno). [*Vedi* t. X, pag. 13]. Sulle collinearità e correlazioni ordinarie ed eccezionali in due spazi a quattro dimensioni. *Rend. Istituto Lombardo*, $XXIX_2$, 1896.

Vivanti, G. (Messina). [*Vedi* t. X, pag. 13]. Ueber gewisse der Ikosaederirrationalität analoge Irrationalitäten. *Monatshefte f. Math. und Phys.* VI, 1895.

— Contributo alla teoria delle equazioni a derivate parziali del secondo ordine. *Rendic. Istituto Lombardo*, $XXIX_2$, 1896.

— Sulle equazioni a derivate parziali del second'ordine a tre variabili indipendenti. *Mathem. Annalen*, LVIII, 1896.

Voss, A (Würzburg). [*Vedi* t. X, pag. 13]. Ueber die Anzahl der cogredienten und adjungirten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst. *Sitzungsb. d. k. bayer. Ak. d. Wiss.* XXVI, 1896.

— Symmetrische und alternirende Lösungen der Gleichung $SX = XS'$. *Ibid.*, XXVI, 1896.

Vries, J. de (Haarlem). [*Vedi* t. X, pag. 14]. Ueber geometrische Beweise zahlentheoretischer Sätze. *Kon. Ak. van Wetenschappen Amsterdam*, December 1896, January 1897.

— Recherches sur les coordonnées multipolaires. *Archives Teyler*, V_2, 1896.

Zeuthen, H. G. (Kopenhagen). [*Vedi* t. X, p. 14]. Die geometrische Construction als « Existenzbeweis » in der antiken Geometrie. *Mathem. Annalen*, XLVII, 1896.

— Indbydelsesskrift til Kiobenhavns Universitets aarsfest i anledning af hans Majestaet Kongens fodselsdag. *Kiobenhavn*, 1896.

F. B.

INDICE

PUBBLICAZIONI NON PERIODICHE

PERVENUTE IN DONO AL CIRCOLO.

REPERTORIO BIBLIOGRAFICO

DELLE SCIENZE MATEMATICHE IN ITALIA.

Fine della Parte 2^a del Tomo XI (1897).

Tipografia Matematica
28, via Ruggiero Settimo, Palermo.